Wykład FIZYKA I

6. Zasada zachowania pędu

Dr hab. inż. Władysław Artur Woźniak
Katedra Optyki i Fotoniki
Wydział Podstawowych Problemów Techniki
Politechnika Wrocławska

http://www.if.pwr.wroc.pl/~wozniak/fizyka1.html

PĘD CIAŁA

- **Siła** to wielkość **wektorowa**, która jest miarą oddziaływania mechanicznego innych ciał na dane ciało.

- **Energia** to **skalarna** wielkość opisująca ruch.

(zalety i wady opisu skalarnego)

DEFINICJA:

- **Pęd** to iloczyn masy ciała i jego prędkości wektorowej:

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}$$

- **Siła** może być teraz zdefiniowana jako zmiana pędu w czasie:

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{p}}{dt}$$

DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

Zasady dynamiki Newtona

II. Zasada:

Tempo zmiany pędu ciała jest równe sile wypadkowej działającej na to ciało;

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{wyp}$$

Dla ciał o stałej masie:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

a stąd:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{wyp}}{m}$$

ZASADA ZACHOWANIA PĘDU

- Historycznie: zasadę zachowania pędu można wyprowadzić z II i III zasady dynamiki Newtona (podobnie jak zasadę zachowania energii) – jakkolwiek można postąpić dokładnie odwrotnie…

- W rzeczywistości można wyprowadzić zarówno zasady Newtona jak i zasady zachowania energii i pędu z **praw jednorodności przestrzeni i czasu.**

- **Prawo jednorodności przestrzeni** mówi, że wszystkie prawa fizyki są takie same we wszystkich położeniach w przestrzeni.

- **Prawo jednorodności czasu** znaczy, że prawa fizyki nie zmieniają się w czasie (a w konsekwencji: żadna stała fizyczna nie zmienia swej wartości w czasie).

- PRZYPOMNIENIE Pojęcie **układu odosobnionego (zamkniętego, izolowanego):** jest to układ, na który nie działają żadne siły zewnętrzne (źródła wszystkich sił znajdują się w obrębie samego układu; są to siły oddziaływania między ciałami układu).

ZASADA ZACHOWANIA PĘDU

- Rozpatrzmy układ odosobniony złożony z n ciał o masach m_1, m_2,…,m_n. Ciała te mają prędkości $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,…,$\mathbf{v}_n$. Oznaczmy siły (wewnętrzne!) jakimi ciała działają na siebie jako: $\mathbf{F}_{ik}$ – siła, jaką ciało k-te działa na ciało i-te.

Z II zasady dynamiki Newtona:

$$\frac{d}{dt}\left(m_1\vec{v}_1\right)=\vec{F}_{12}+\vec{F}_{13}+\ldots+\vec{F}_{1n}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_2\vec{v}_2\right)=\vec{F}_{21}+\vec{F}_{23}+\ldots+\vec{F}_{2n}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m_n\vec{v}_n\right)=\vec{F}_{n1}+\vec{F}_{n2}+\ldots+\vec{F}_{n(n-1)}$$

Dodając stronami powyższe równania:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\right)=\left(\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}\right)+\ldots+\left(\vec{F}_{(n-1)n}+\vec{F}_{n(n-1)}\right)$$

ZASADA ZACHOWANIA PĘDU

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\right)=\left(\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}\right)+\ldots+\left(\vec{F}_{(n-1)n}+\vec{F}_{n(n-1)}\right)$$

- Z III zasady dynamiki Newtona mamy: $\vec{F}_{ik}=-\vec{F}_{ki}$
- Podstawiając ten warunek do poprzedniego równania, otrzymujemy:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(m_i\vec{v}_i\right)=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\vec{v}_i\right)=0$$

- Pęd układu równy jest sumie pędów poszczególnych elementów:

$$\vec{p}=\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{p}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\vec{v}_i\right)$$

ZASADA ZACHOWANIA PĘDU

- Ostatecznie, otrzymujemy: $$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0$$

czyli: $$\vec{p} = const$$

Zasada zachowania pędu:

Pęd zamkniętego układu ciał nie zmienia się z upływem czasu.

ZA MAŁO!

ZASADA ZACHOWANIA PĘDU

- Podobny rezultat osiągniemy, gdy rozważymy działanie siły zewnętrznej a dokładniej: układ sił zewnętrznych, których wypadkową jest $\vec{F}_{wyp,zewn}$.

Wtedy: $$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{wyp,zewn}$$

Zmiana pędu układu jest równa wypadkowej sił zewnętrznych, działających na układ.

(Ale to nie jest formalnie zasada zachowania pędu, tylko zależność między siłami i pędami, która pozwala „coś” policzyć, w zależności od potrzeb – porównaj z twierdzeniem o pracy i energii).

- Inna postać sformułowania zasady zachowania pędu:

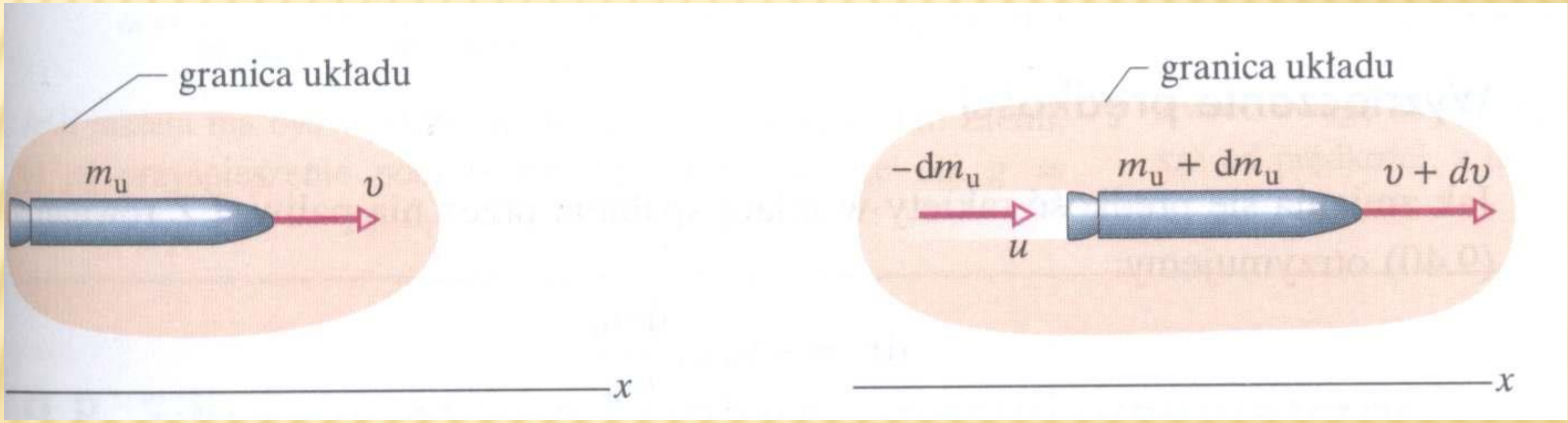
Suma pędów wszystkich ciał układu w momencie początkowym równa się sumie pędów tych ciał w dowolnym momencie późniejszym.

(Najczęściej stosowana do zagadnienia zderzeń).

UKŁAD O ZMIENNEJ MASIE

• **Rakieta kosmiczna:** masa paliwa to większość masy całej rakiety, stąd konieczność uwzględnienia zmiany masy ciała w czasie ruchu!

• Zastosujmy zasadę zachowania pędu do układu rakieta-spalane paliwo:



$$m_u v = -dm_u u + (m_u + dm_u)(v + dv)$$

pęd rakiety „przed” = pęd gazów „po”+ pęd rakiety „po”

UWAGA: dm_u jest ujemne…

UKŁAD O ZMIENNEJ MASIE

$$m_u v = -dm_u u + (m_u + dm_u)(v + dv)$$

- Wprowadźmy prędkość względną rakiety i spalin **v**$_{wzgl}$:

(**v**$_{wzgl}$ jest dodatnie, bo to prędkość rakiety względem spalin, ale **u** ma różny znak, bo to bezwzględna prędkość spalin wobec Ziemi!)

$$(v + dv) = u + v_{wzgl}$$

- Wtedy:

$$-dm_u v_{wzgl} = m_u dv$$

$$\boxed{-\frac{dm_u}{dt} v_{wzgl} = m_u \frac{dv}{dt}}$$

$$R \equiv -\frac{dm_u}{dt} > 0$$

Szybkość spalania paliwa

Siła ciągu rakiety = zmiana jej pędu

UKŁAD O ZMIENNEJ MASIE

$$-\frac{dm_u}{dt}v_{wzgl} = m_u\frac{dv}{dt}$$

- Policzmy prędkość rakiety (równanie różniczkowe!):

$$-dm_u v_{wzgl} = m_u dv \Rightarrow \boxed{dv = -v_{wzgl}\frac{dm_u}{m_u}}$$

$$\int_{v_{pocz}}^{v_{konc}} dv = -v_{wzgl}\int_{m_{u\,pocz}}^{m_{u\,konc}}\frac{dm_u}{m_u}$$

$$v_{konc} - v_{pocz} = v_{wzgl}\ln\frac{m_{upocz}}{m_{ukonc}}$$

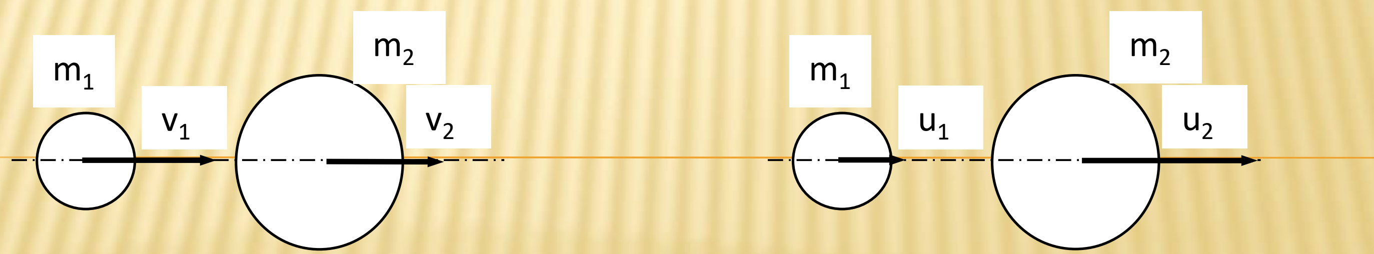
- Im lepszy stosunek masy początkowej do końcowej, tym większa prędkość = rakiety wielostopniowe.

ZDERZENIA

• **Zderzeniem doskonale sprężystym** nazywamy takie zderzenie, w wyniku którego energia mechaniczna układu zderzających się ciał nie zamienia się w inne rodzaje energii (np. cieplnej).

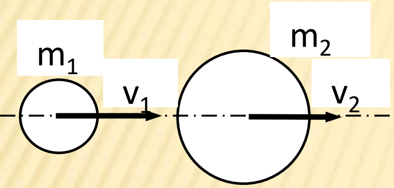
Podczas rozwiązywania zagadnień zderzeń sprężystych stosujemy zasadę zachowania energii i zasadę zachowania pędu.

Zderzenie centralne:
wektory prędkości skierowane są wzdłuż jednej prostej (wszystkie, to znaczy przed i po zderzeniu!)

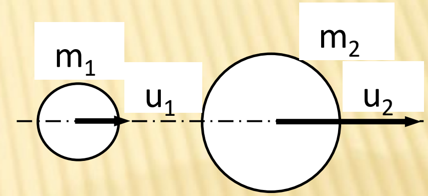


$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2$$

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}$$



ZDERZENIA SPRĘŻYSTE



- Rozwiązanie zagadnienia centralnego zderzenia sprężystego dwóch ciał:

$$u_1 = \frac{v_1(m_1 - m_2) + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad u_2 = \frac{v_2(m_2 - m_1) + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

- Przypadki szczególne:

- obie kule mają jednakowe masy ($m_1 = m_2$), wtedy:

$$u_1 = v_2 \qquad u_2 = v_1$$

(kule „zamieniają się” prędkościami);
a co, gdy druga kula stoi?

- druga kula jest nieruchoma i ma wielokrotnie większą masę ($v_2=0$ i $m_2 >> m_1$), wtedy:

$$u_1 = -v_1 \qquad u_2 = 0$$

(pierwsza, mniejsza kula odbija się od nieruchomej i porusza się w przeciwnym kierunku z tą samą, co do wartości, prędkością).

ZDERZENIA NIESPRĘŻYSTE

- **Układ rozpraszający (dyssypacyjny)** to taki układ, w którym energia mechaniczna stopniowo zmniejsza się na wskutek jej przemiany w inne (niemechaniczne) rodzaje energii (np. ciepło).

- Przykładem jest układ ciał podlegający **zderzeniu doskonale niesprężystemu** – występuje w nim odkształcenie zderzających się ciał powodujące, że po zderzeniu poruszają się one razem z tą sama prędkością.

Podczas rozwiązywania zagadnień zderzeń niesprężystych stosujemy **tylko** <u>zasadę zachowania pędu</u>.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u$$

Rozwiązanie: $$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

ZDERZENIA NIESPRĘŻYSTE

- Różnica energii obu ciał po i przed zderzeniem:

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(v_1 - v_2)^2 < 0$$

Energia została rozproszona – wykonana została jej kosztem praca **L**, potrzebna na:

- „złączenie się" ciał;

- zmianę ich kształtu (kucie metali!);

- przezwyciężanie oporów (np. wbijanie gwoździ młotkiem, pali kafarem).

W przypadku, gdy drugie ciało przed zderzeniem było w spoczynku (v_2=0):

$$L = -\Delta E = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^{\,2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{k1}$$

Stąd:

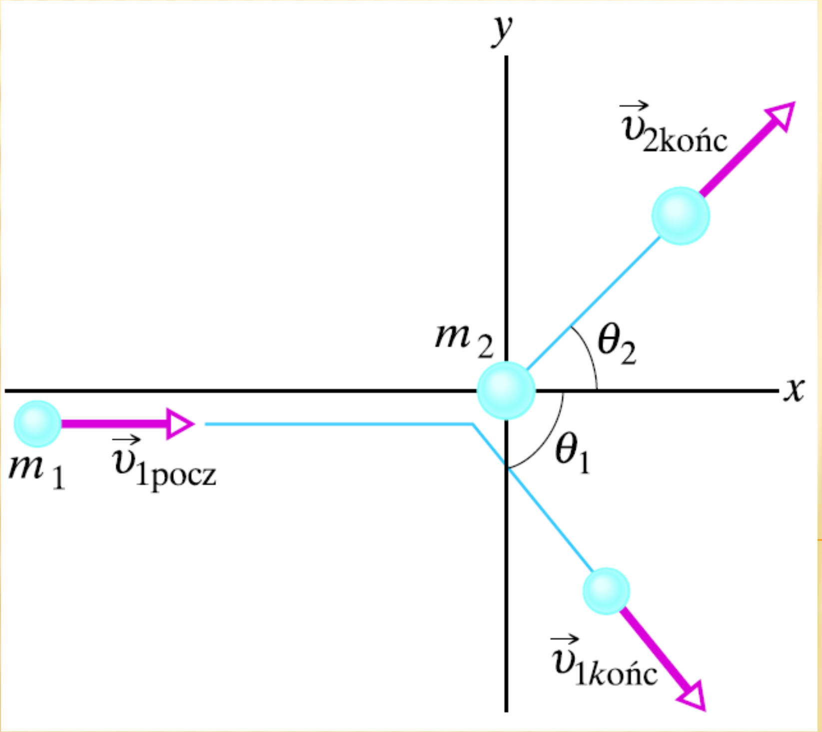
- **zmiana kształtu -> m_2 jak największe (duża część energii kinetycznej pierwszego ciała „zużyta" na pracę);**
- **„wbijanie" -> m_1 jak największe (duża energia kinetyczna układu po zderzeniu).**

ZDERZENIA

- **Zderzenia w dwóch wymiarach** wymagają uwzględnienia faktu, że prędkość jest wielkością wektorową:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$



$$m_1 v_1 = m_1 u_1 \cos\theta_1 + m_2 u_2 \cos\theta_2$$

$$0 = -m_1 u_1 \sin\theta_1 + m_2 u_2 \sin\theta_2$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}$$

$$v_1 = v_{1pocz} \qquad u_1 = v_{1konc} \qquad u_2 = v_{2konc}$$