P O D S T A W Y E L E K T R O D Y N A M I K I – Ć W I C Z E N I A
Semestr zimowy r. ak. 2018/2019

PIERWSZE ZAJĘCIA

1. Układ kartezjański, wektory jednostkowe – wersory.
2. Skalary, wektory, tensory.
3. Iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy.
4. Konwencja sumacyjna Einsteina (KSE).
5. Delta Kroneckera (DK), sumowanie z deltą Kroneckera, ślad, inne przykłady.
6. Tensor Leviego-Civity (TLC), relacja sumacyjna dla dwóch tensorów.
7. Gradient, dywergencja, rotacja, iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy – zapis z wykorzystaniem KSE, DK, TLC.

ZADANIA

I

1. Pokazać, że:
   1) div rot $\mathbf{A} = 0$,
   2) rot grad $f = 0$,
   3) div (grad $f \times$ grad g) $= 0$,

   gdzie wektor **A** i skalary f i g – dowolne funkcje różniczkowalne.

2. Wyznaczyć wartość wyrażenia $\mathbf{B} \cdot (\nabla\times\mathbf{B})$, gdy $\mathbf{B} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + 1\,\mathbf{k}$, oraz gdy $\mathbf{B} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 1\,\mathbf{k}$. Podać inne przykłady **B,** takie że $\mathbf{B} \cdot (\nabla\times\mathbf{B}) \neq 0$.

3. Niech $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ będzie wektorem o stałym kierunku. Udowodnić, że rot **A** jest wektorem ortogonalnym do **A**.

4. Wykazać tożsamości wektorowe (f, g oraz wektory **A**, **B** – dowolne funkcje różniczkowalne):
   1) grad $fg = f$ grad $g + g$ grad f
   2) div $f\mathbf{A} = f$ div $\mathbf{A} + \mathbf{A}$ grad f
   3) rot $f\mathbf{A} = f$ rot $\mathbf{A}$ + (grad f)$\times\mathbf{A}$
   4) div $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{B}$ rot $\mathbf{A} - \mathbf{A}$ rot $\mathbf{B}$
   5) grad $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = \mathbf{A}\times$rot $\mathbf{B} + \mathbf{B}\times$rot $\mathbf{A} + (\mathbf{A}\bullet\nabla)\,\mathbf{B} + (\mathbf{B}\bullet\nabla)\,\mathbf{A}$
   6) grad div $\mathbf{A}$ = rot rot $\mathbf{A}$ + div grad $\mathbf{A}$
   7) rot $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}$ div $\mathbf{B} - \mathbf{B}$ div $\mathbf{A} + (\mathbf{B}\bullet\nabla)\,\mathbf{A} - (\mathbf{A}\bullet\nabla)\,\mathbf{B}$

5. Wyrazić we współrzędnych kartezjańskich, cylindrycznych (walcowych) oraz sferycznych wektor wodzący **r** oraz jego długość, wykorzystując wektory jednostkowe określone w tych układach współrzędnych.

6. Wyznaczyć współczynniki Lamego U, V, W oraz element objętości $d\tau$ dla układów: kartezjańskiego, cylindrycznego (walcowego), sferycznego.

7. Obliczyć wektory jednostkowe wyrażone we współrzędnych kartezjańskich dla układu cylindrycznego (walcowego) oraz sferycznego. Wykazać ortogonalność tych wektorów. Określić skrętność (parzystość) układu.

8. Obliczyć grad $f(r)$**,** gdzie dowolna różniczkowalna funkcja $f(r)$ zależy tylko od długości wektora **r**, we współrzędnych kartezjańskich, cylindrycznych (walcowych) oraz sferycznych.

9. Sprawdzić następujące operacje w różnych (kartezjańskim, cylindrycznym, sferycznym) układach współrzędnych:

   grad $r^n = n\, r^{n-2}\, \mathbf{r}$, n=0,+1,+2,...,   div **r**=3,   rot **r**=0 ,   div **w** = 2/r,
   rot **w** = 0,   gdzie **w** = **r**/r.

10. Obliczyć grad (**er**), grad(**er**/r^3), (**e**•∇) **r**, div(**e**×**r**), rot(**e**×**r**), **e** -stały wektor.

11. Obliczyć grad**(A•B)**, div(f**A**), rot(f**A**), gdy **A**, **B** i f zależą tylko od długości wektora **r**.

12. Obliczyć we współrzędnych cylindrycznych i sferycznych: grad $f(r)$, $\Delta f(r)$, div $\mathbf{A}(r)$, rot $\mathbf{A}(r)$, funkcje $f(r)$ i $\mathbf{A}(r)$ zależą tylko od r ($r = \rho$ – dla współrzędnych cylindrycznych).

13. Pokazać, że

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\,\Phi\right)$$

14. Wykazać, że dla współrzędnych walcowych [ρ, ϕ, z], $\nabla \ln \rho$ = rot $\mathbf{k}\phi$, gdzie **k** jest wersorem osi Z.

15. Wykazać, że dla dowolnej zamkniętej powierzchni $\oint d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$.

16. Posługując się twierdzeniem Gaussa lub jego rozszerzeniami obliczyć całki

   $\mathbf{I} = \oint \mathbf{r}\,(\mathbf{An})\, dS$ **,** $\mathbf{I} = \oint (\mathbf{Ar})\,\mathbf{n}\, dS$, gdzie **A** - stały wektor, oraz **n** dS = d**S**.

17. Posługując się twierdzeniem Gaussa wykazać dla dowolnych pól wektorowych **A** i **B**, który związek jest prawdziwy związek:

$$\int \nabla\cdot\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,dV=\oint \mathbf{B}\,\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \qquad \text{czy} \qquad \int \nabla\cdot\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,dV=\oint \mathbf{A}\,\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

   gdzie: $\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\,\mathbf{B}\right)_i=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(A_jB_i\right).$

18. W sferycznym układzie współrzędnych znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a zależne jedynie od jednej współrzędnej r.

19. Dana jest funkcja skalarna $f=x^2+y^2+z^2$ oraz pole wektorowe $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
   Obliczyć: Δf, $\Delta\mathbf{A}$, $\Delta(f\mathbf{A})$.

20. Obliczyć całkę krzywoliniową , $\oint \mathbf{A}d\mathbf{r}$ wzdłuż

   a) okręgu o promieniu a, dla $\mathbf{A} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

   b) boków kwadratu, którego wierzchołki znajdują się w punktach (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), dla $\mathbf{A} = \mathbf{i}\sin y + \mathbf{j}\,(x\cos y)$.

   W obu przypadkach sprawdzić, że rot **A**=0. Znaleźć taką funkcję U, że grad U = **A**. Sprawdzić wynik za pomocą twierdzenia Stokesa.

21. Niech wektor **v** = [a (x_0 – x) + b (z_0 – z)] **j**, gdzie a, b, x_0, z_0 – stałe. Wyznaczyć rotację wektora **v.**

22. Znaleźć dywergencję i rotację pola wektorowego:
   a). **A**= $(x + y)$**i** + $(y + 2x)$**j** + $(z + xy)$**k**,   b). **A**= $(x$**i** + y**j**$)/(x^2+y^2)$,
   c). **A**= yz **i** – zx **j** + xy **k**,   d). **A**= sin x cosh y **i** – cos x sinh y **j** + $(x+y)$ **k**,
   e). **A**= sin x sinh y **i** – cos x cosh y **j** + xy **k,**   f). **A**= $(z – y)$ **i** + $(x – y)$ **j** + $(x – y)$ **k.**

Określić jakie są to wektory: biegunowy (polarny), osiowy (aksjalny), lub inne.

II.

1. Obliczyć następujące całki:

   a. $\int_2^6 (3x^3 - 2x - 1)\delta(x-3)\,dx$,   b. $\int_0^5 \cos x\,\delta(x-\pi)\,dx$,

   c. $\int_0^3 x^3\delta(x+1)\,dx$,   d. $\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x+3)\delta(x+2)\,dx$

2. Wykazać, że $\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x)$ oraz $\int_0^\infty \delta(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

3. Obliczyć następujące całki:

   a. $\int_0^3 x^3\delta(x-3)\,dx$ b. $\int_{-2}^2 (2x+3)\delta(3x)\,dx$,   c. $\int_0^2 (x^3+3x+2)\delta(1-x^2)\,dx$,

   d. $\int_{-1}^1 9x^2\delta(3x^2-2)\,dx$ e. $\int_{-\infty}^a (3x^3+ax-b)\delta(x-b)\,dx$

4. Wykazać, że ($\varepsilon > 0$)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\varepsilon k}\cos kx\,dk = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$$

5. Obliczyć granice $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$), gdy $x = 0$ albo $x \neq 0$, oraz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,\varepsilon)\,dx$$

   dla 1) $\delta(x,\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$,   2) $\delta(x,\varepsilon) = \frac{\exp(-x^2/\varepsilon)}{\sqrt{\pi\,\varepsilon}}$,

   oraz granicę $n \to \infty$, gdy $x = 0$ albo $x \neq 0$ dla $\delta(x,n) = \frac{(2n-1)!!}{2^n(n-1)!}\cosh^{-2n} x$. Wykorzystać wzór Stirlinga $n! \approx n^n e^{-n}$.

6. Korzystając z definicji transformaty Fouriera (prostej i odwrotnej) pokazać, że $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}dk$, oraz korzystając z tej relacji wykazać, że $\delta(x) = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin kx}{x}$.
7. Wykorzystując rozwiązania równania falowego d'Alemberta wyznaczyć relatywistyczny 4-potencjał $A^{\mu}(\mathbf{r},t) = [\varphi(\mathbf{r},t), \mathbf{A}(\mathbf{r},t)]$ (potencjał Liénarda-Wiecherta) wytwarzany przez jeden

   ładunek punktowy e wykonujący zadany ruch, określony równaniem $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0(t')$. Najpierw przyjmując, że $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}$, wykazać związek:
$$\delta\left(t - t' + \tfrac{1}{c}\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')\right|\right) = \frac{\delta(t - t')}{\frac{d}{dt'}\left[t' - t + \tfrac{1}{c}\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')\right|\right]}.$$

III

1. Na podstawie wzorów transformacji Lorentza określających przejście czterowektora A^{μ} w czterowektor $A^{\mu\prime}$ wyznaczyć:
   1) zależności dla dylatacji czasu,
   2) zależności dla skrócenia odległości, tzw. skrócenia Lorentza-Fitzgeralda,
   3) relatywistyczne prawo składania prędkości.
2. Wykazać, że element czaso-przestrzeni $d\Omega = c\,dt\,dx\,dy\,dz$ jest niezmiennikiem (inwariantem) transformacji Lorentza.
3. Wykonać transformacje Lorentza dla:
   1) czterowektora prądu,
   2) czterowektora falowego.
4. Wykazać, że ładunek q zawarty w przestrzeni V jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.
5. Czas własny rozpadu mezonów π^+ wynosi $t_w = 2{,}2\cdot10^{-8}$ s. Jakie są czasy rozpadu t_r tych cząstek poruszających się z prędkościami (β = v/c) β = 0,6; 0,886; 0,99? Jakie drogi l_r przelecą te cząstki w czasie t_r ? Jakie byłyby drogi l_n, gdyby nie uwzględniać dylatacji czasu?
6. Ziemia krąży wokół Słońca z prędkością v = $3\cdot10^4$ m/s. Obliczyć o ile sekund ulega skrócenia czas ziemski po 100 okrążeniach Ziemi wokół Słońca. Przyjąć c = $3\cdot10^8$ m/s.
7. Uwzględniając, że transformacja obrotu $C_{\alpha}{}^{\beta}$ w 4-wymiarowej przestrzeni to transformacja liniowa taka, że: $A_{\alpha} = C_{\alpha}{}^{\beta}A'_{\beta}$ i $A^{\alpha} = C^{\alpha}{}_{\beta}A'^{\beta}$, oraz że kwadrat 4-wektora $A_{\alpha}A^{\alpha}$ jest inwariantem dla transformacji obrotu ($A_{\alpha}A^{\alpha} = A'_{\beta}A'^{\beta}$) wykazać, że spełniona jest relacja ortogonalności: $C^{\gamma}{}_{\alpha}\,C_{\gamma}{}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$.
8. Na podstawie poprzedniego zadania wykazać, że: $A'_{\alpha} = C^{\beta}{}_{\alpha}A_{\beta}$ i $A'^{\alpha} = C_{\beta}{}^{\alpha}A^{\beta}$, oraz z faktu, że kwadrat 4-wektora $A'_{\alpha}A'^{\alpha}$ jest inwariantem dla transformacji obrotu ($A'_{\alpha}A'^{\alpha} = A_{\beta}A^{\beta}$) wykazać, że spełniona jest druga relacja ortogonalności: $C_{\alpha}{}^{\gamma}\,C^{\beta}{}_{\gamma} = \delta_{\alpha}^{\beta}$.
9. Uwzględniając transformacje liniowe $A_{\alpha} = C_{\alpha}{}^{\beta}A'_{\beta}$, $A^{\alpha} = C^{\alpha}{}_{\beta}A'^{\beta}$, $A'_{\alpha} = C^{\beta}{}_{\alpha}A_{\beta}$, $A'^{\alpha} = C_{\beta}{}^{\alpha}A^{\beta}$ oraz relacje ortogonalności: $C^{\gamma}{}_{\alpha}\,C_{\gamma}{}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$ oraz $C_{\alpha}{}^{\gamma}\,C^{\beta}{}_{\gamma} = \delta_{\alpha}^{\beta}$ pokazać, że $\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} = C^{\alpha}{}_{\beta}\frac{\partial}{\partial x'_{\beta}}$ oraz $\frac{\partial}{\partial x'_{\alpha}} = C_{\beta}{}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{\beta}}$.

10. Wykazać, że wyrażenia postaci: $\dfrac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha}$, oraz równanie ciągłości $\dfrac{\partial j^\lambda}{\partial x^\lambda} = 0$ i cechowanie Lorentza $\dfrac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$ są niezmiennicze względem transformacji grupy obrotów w czasoprzestrzeni, j^λ – 4-wektor prądu.

11. Sprawdzić niezmienniczość względem transformacji grupy obrotów w czasoprzestrzeni relatywistycznego równania Newtona (dla naładowanej cząstki w polu elektromagnetycznym, uwzględniając siłę Lorentza) $\dfrac{d\,p^\mu}{d\,s} = \dfrac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$.
12. Wykazać niezmienniczość równań Maxwella względem transformacji grupy obrotów w czasoprzestrzeni (zadanie 9) wykorzystując 4-wymiarową postać równań Maxwella:

$$e^{\kappa\lambda\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} F_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu ,$$

gdzie $F^{\mu\nu}$ – 4-tensor pola elektromagnetycznego, j^μ – 4-wektor prądu.

13. Wykazać niezmienniczość różniczkowych równań ciągłości dla gęstości energii i gęstości pędu pola elektromagnetycznego względem transformacji grupy obrotów w czasoprzestrzeni wykorzystując ich 4-wymiarowe postaci:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu ,$$

gdzie $T^{\mu\nu}$ – 4-tensor energii i pędu pola elektromagnetycznego.

14. Wykazać, że wyrażenia postaci: $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ i $F_{\kappa\lambda}\, \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu}$ są niezmiennikami względem transformacji grupy obrotów.
15. Wykazać, że równanie falowe d'Alemberta

$$\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\nu \partial x_\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\mu , \quad \text{gdzie } A^\mu = [\varphi, \mathbf{A}]$$

jest niezmiennicze względem transformacji grupy obrotów.

16. Zakładając, że obrót zachodzi tylko w płaszczyźnie $x^0 x^1$ zdefiniować postać tensora transformacji obrotu $C_\alpha^{\ \beta}$, oraz wykorzystując relacje ortogonalności $C^\gamma_{\ \alpha} C_\gamma^{\ \beta} = \delta_\alpha^\beta$ i $C_\alpha^{\ \gamma} C^\beta_{\ \gamma} = \delta_\alpha^\beta$ wyznaczyć jawną postać szczególnej transformacji Lorentza. Przyjąć, że $\dfrac{C_0^{\ 1}}{C_0^{\ 0}} = \beta$ oraz zasadę, że zmiana znaku elementów tensora $C_\alpha^{\ \beta}$ zachodzi tylko przy podnoszeniu lub opuszczaniu indeksów przestrzennych (1,2,3).

IV

1. Pokazać, że gdy pole $\mathbf{H} = H\,\mathbf{k}$ to $\mathbf{A} = Hx\,\mathbf{j}$ lub $\mathbf{A} = -Hy\,\mathbf{i}$, oraz że gdy $\mathbf{E} = E\,\mathbf{i}$ to $\varphi = -Ex$, gdzie pola H i E są stałe i jednorodne.

2. Znaleźć potencjały i rozważyć ich cechowanie we współrzędnych kartezjańskich i cylindrycznych a). $\mathbf{H} = H\mathbf{z}$, $H = const$ b). $H = bt\,\mathbf{z}$, b = const.
3. Wyznaczyć energię potencjalną U jednorodnie naładowanej sfery o promieniu R i całkowitym ładunku Q. ($U = Q^2/2R$)
4. Wykorzystując wynik zad. 3 wyznaczyć energię potencjalną układu dwóch naładowanych cząstek – kul o promieniach r i R, i ładunkach q i Q, znajdujących się w odległości $\rho > r + R$.
5. Wykazać, że w nieskończonym ośrodku (nieograniczonym) o skończonej (niezerowej) konduktywności σ nie może istnieć trwały i stały w czasie rozkład ładunków elektrycznych (wykorzystać $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ - prawo Ohma).

6. Wykazać, że dla stałego pola magnetycznego $\mathbf{H} = H\mathbf{z}$ zamkniętego w nieskończonym solenoidzie o promieniu R, potencjał we współrzędnych cylindrycznych wyraża się następująco:
   $A_\rho = A_z = 0$ oraz $A_\phi = \dfrac{H}{2}\left[\dfrac{\rho}{2}Y(R-\rho) + \dfrac{R^2}{\rho}Y(\rho - R)\right]$, gdzie $Y(x)$ oznacza funkcję Heaviside'a.
   Wyznaczyć natężenie pola magnetycznego wewnątrz i na zewnątrz solenoidu.
7. Pokazać, że jeżeli wielkości fizyczne są określone za pomocą funkcji zespolonych np.
   $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ oraz $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$, gdzie $\mathbf{E}_0$ i $\mathbf{H}_0$ są stałymi zespolonymi wektorami, to średnia po czasie z iloczynu skalarnego ich części rzeczywistych wyraża się następująco:
   $\overline{\mathrm{Re}\,\mathbf{E}(t)\cdot\mathrm{Re}\,\mathbf{H}(t)} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{H}_0^*$, w szczególności $\overline{\mathrm{Re}\,\mathbf{E}(t)\cdot\mathrm{Re}\,\mathbf{E}(t)} = \frac{1}{2}\left|\mathbf{E}_0\right|^2$.
8. Pole elektryczne w betatronie wyraża się wzorem $\mathbf{E} = \mathbf{z}\, kt/\rho$, k – stała, t – czas, ρ – współrzędna cylindryczna. Obliczyć pole magnetyczne. Sprawdzić, że $\mathbf{H}$ jest bezźródłowe i wirowe (div $\mathbf{H}$=0, rot $\mathbf{H} \neq 0$). Znaleźć potencjały dla pól $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$.
9. Określić długość fali fotonu, którego energia odpowiada relatywistycznej energii spoczynkowej masy Ziemi.
10. Wyznaczyć potencjał i natężenie w punkcie P od jednorodnie naładowanego odcinka o zadanej długości l.
11. Fala płaska o częstości ω rozchodzi się w próżni w kierunku $\mathbf{n}$:
    $\mathbf{n} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})/\sqrt{14}$. Wiedząc, że $\mathbf{E}$ jest równoległe do płaszczyzny XY znaleźć równanie opisujące wektory fali $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ oraz $\mathbf{A}$.
12. Wypisać potencjał zespolony W jednorodnego pola elektrycznego o natężeniu $\mathbf{E}$. Rozpatrzyć przypadek szczególny pola elektrycznego wytwarzanego przez powierzchnię o gęstości powierzchniowej ładunku σ.
13. Wykorzystując wzór $\mathbf{m} = \frac{1}{2}\sum e\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ wyznaczyć moment magnetyczny kołowej ramki o promieniu R, w której płynie prąd o natężeniu I.
14. Wypisać równanie różniczkowe, które spełnia potencjał $V = q\exp(-r/a)/r$. Wielkości q i a stałe.
15. Znaleźć potencjał i siłę Coulomba w n-wymiarowej przestrzeni. Objętość n-wymiarowej kuli wynosi $\Omega_n = R^n\pi^{n/2}/(n/2)!$, powierzchnia jest równa $S_n = d\Omega_n/dR$. Ponadto $(½)! = \sqrt{\pi}$.
16. Rozwiązać równanie różniczkowe opisujące precesję Larmora
    $\dfrac{d\,\mathbf{M}}{d\,t} = -\mathbf{\Omega}\times\mathbf{M}$, gdzie $\mathbf{\Omega} = \dfrac{e}{2mc}\mathbf{H}$ jest częstością Larmora.

V

1. Niech Y(x) oznacza funkcję Heaviside'a. Obliczyć w sensie teorii dystrybucji:

a). $(\frac{d}{dx} - k)\, Y(x)\, e^{kx}$, b). $(\frac{d^2}{dx^2} + q^2)Y(x) \sin(qx)/q$, c). $\frac{d^m}{dx^m} Y(x) \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$.

2. Obliczyć w sensie teorii dystrybucji wszystkie pochodne $\frac{d^k}{dx^k}|x|$ funkcji $|x|$.

3. Wykazać, że $(\partial/\partial x + i\, \partial/\partial y)/(x + iy) = 2\pi\, \delta(x + iy)$.

4. Wykazać, że dla n-wymiarowej przestrzeni R^n:

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = 0 \quad \text{dla} \quad r \neq 0, \quad \text{gdzie} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \quad \text{oraz} \quad r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

5. Wyznaczyć postać wyrażenia:

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)\, S_n \delta(\mathbf{r}) \quad \text{dla} \quad n = 2,$$

gdzie $S_n = 2\pi^{\frac{n}{2}} / \Gamma(\frac{n}{2})$ jest powierzchnią n-wymiarowej sfery.

6. Przykłady z podręcznika III: rozdz. IX, § 2, s. 263, przykłady 1, 2, 3, 4 oraz rozdz. IX, § 4, s. 266, przykłady 1, 2, gdzie $t = t' + \frac{1}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|$.

7. Szereg trygonometryczny $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ jest zbieżny w klasycznym sensie do funkcji okresowej $\frac{\pi - x}{2}$ o okresie 2π, określonej dla $0 < x < 2\pi$. Wykorzystując funkcję Heaviside'a $Y(x)$ zapisz rezultat sumowania szeregu dla dowolnego x, $-\infty < x < \infty$. Znajdź pochodną dystrybucyjną tej funkcji.

TEMATY DO OPRACOWANIA

1. Funkcje pola
   I – § 9 rozdz. 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74 s. 205-214
2. Funkcje pola we współrzędnych krzywoliniowych
   I – § 8 rozdz. 66, 67 s. 190-192, I - § 14 rozdz. 103, 104 s. 305-309
3. Funkcje pola we współrzędnych krzywoliniowych c.d.
   I – § 14 rozdz.105, 106, 107 s. 309-314
4. Funkcje pola we współrzędnych krzywoliniowych przykłady
   I – § 14 przykład 1, 2, 3, 4 s. 314-316
5. Dywergencja
   I – § 11 rozdz. 78, 79, 82 s. 231-236 i 238-240
6. Wzory Greena i niezmienniki pola
   I – § 11 rozdz. 80 i 83 s. 236-237 i 240-242
7. Rotacja (tylko na płaszczyźnie)
   I – § 12 rozdz. 84-85 i 88-89 s. 251-255 i 258-262
8. Funkcja delta Diraca

II – rozdz. 1.5 s. 65-69, 70-71,

III – § 12 rozdz. 1 s. 34-39, III - dodatek 6 s. 437-442

9. Równanie Poissona i jego rozwiązanie

I – § 14 rozdz. 111 s. 288-292

10. Prędkość światła

IV – par. 42-3 s. 403-407, V – rozdz. 12.4 s. 581-589

https://www.youtube.com/watch?v=abqgCsJx4SE

11. Doświadczenie Michelsona i Morleya; przestrzeń czterowymiarowa

III – rozdz. 12, § 1 – 2 s. 307-309, V – rozdz. 12.5 s. 600-604 (przykład)

12. Interwał czasoprzestrzenny – niezmiennik transformacji

VI – rozdz.1 § 2 s. 14-18

L I T E R A T U R A

I E. Karaśkiewicz – zarys teorii wektorów i tensorów

II D.J. Griffiths – Podstawy elektrodynamiki

III M. Suffczyński – elektrodynamika

IV D. Holliday, R. Resnick – fizyka t. II

V W. Bolton – zarys fizyki, cz. 2

VI L.D, Landau, E.M. Lifszic – teoria pola – fizyka teoretyczna

VII L.D. Landau, E.M. Lifszic – krótki kurs fizyki teoretycznej, tom 1 mechanika, elektrodynamika

Uzupełnienia:

VIII J.D. Jackson – elektrodynamika klasyczna

IX B. Konorski – elementy teorii względności, relatywistycznej mechaniki i elektrodynamiki

X J. Górski, S. Brychczy, T. Czarliński, B. Główczyńska, D. Węglowska W. Woźniak – wybrane działy matematyki stosowanej

XI L.G. Grieczko, W.I. Sugarow, O.F. Tomasiewicz, A.M. Fiedorcienko – zadania z fizyki teoretycznej

XII A. Januszajtis – fizyka dla politechnik, t. I cząstki

XIII A. Januszajtis – fizyka dla politechnik, t. II pola

XIV F. Rohrilch – klasyczna teoria cząstek naładowanych

XV A.L. Fetter, J.D. Walecka – kwantowa teoria układów wielu cząstek

XVI I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendiajew – Matematyka poradnik encyklopedyczny

XVII B.F. Schulz – Wstęp do ogólnej teorii względności

XVIII K.A. Meissner – Klasyczna teoria pola

XIX R. Sikora – teoria pola elektromagnetycznego

Prowadzący zajęcia: Prof. dr hab. inż. Ryszard Gonczarek