PODSTAWY ELEKTRODYNAMIKI – ĆWICZENIA
Semestr zimowy r. ak. 2017/2018

PIERWSZE ZAJĘCIA

1. Układ kartezjański, wektory jednostkowe – wersory.
2. Skalary, wektory, tensory.
3. Iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy.
4. Konwencja sumacyjna Einsteina (KSE).
5. Delta Kroneckera (DK), sumowanie z deltą Kroneckera, ślad, inne przykłady.
6. Tensor Leviego-Civity (TLC), relacja sumacyjna dla dwóch tensorów.
7. Gradient, dywergencja, rotacja, iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy – zapis z wykorzystaniem KSE, DK, TLC.

ZADANIA

I

1. Pokazać, że:
   1) div rot $\mathbf{A} = 0$,
   2) rot grad $f = 0$,
   3) div (grad $f \times$ grad g) = 0,

   gdzie wektor **A** i skalary f i g – dowolne funkcje różniczkowalne.
2. Wyznaczyć wartość wyrażenia $\mathbf{B} \cdot (\nabla\times\mathbf{B})$, gdy $\mathbf{B} = y\,\mathbf{i} - x\,\mathbf{j} + 1\,\mathbf{k}$, oraz gdy $\mathbf{B} = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + 1\,\mathbf{k}$. Podać inne przykłady **B,** takie że $\mathbf{B} \cdot (\nabla\times\mathbf{B}) \neq 0$.
3. Wykazać tożsamości wektorowe (f, g oraz wektory **A**, **B** – dowolne funkcje różniczkowalne):
   1) grad $fg = f$ grad $g + g$ grad f
   2) div $f\mathbf{A} = f$ div $\mathbf{A} + \mathbf{A}$ grad f
   3) rot $f\mathbf{A} = f$ rot $\mathbf{A}$ + (grad f)$\times\mathbf{A}$
   4) div $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{B}$ rot $\mathbf{A} - \mathbf{A}$ rot $\mathbf{B}$
   5) grad $\mathbf{A}\bullet\mathbf{B} = \mathbf{A}\times$rot $\mathbf{B} + \mathbf{B}\times$rot $\mathbf{A} + (\mathbf{A}\bullet\nabla)\,\mathbf{B} + (\mathbf{B}\bullet\nabla)\,\mathbf{A}$
   6) grad div $\mathbf{A}$ = rot rot $\mathbf{A}$ + div grad $\mathbf{A}$
   7) rot $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}$ div $\mathbf{B} - \mathbf{B}$ div $\mathbf{A} + (\mathbf{B}\bullet\nabla)\,\mathbf{A} - (\mathbf{A}\bullet\nabla)\,\mathbf{B}$
4. Wyrazić we współrzędnych kartezjańskich, cylindrycznych (walcowych) oraz sferycznych wektor wodzący **r** oraz jego długość, wykorzystując wektory jednostkowe określone w tych układach współrzędnych.
5. Wyznaczyć współczynniki Lamego U, V, W oraz element objętości $d\tau$ dla układów: kartezjańskiego, cylindrycznego (walcowego), sferycznego.
6. Obliczyć wektory jednostkowe wyrażone we współrzędnych kartezjańskich dla układu cylindrycznego (walcowego) oraz sferycznego. Wykazać ortogonalność tych wektorów. Określić skrętność (parzystość) układu.
7. Obliczyć grad $f(r)$**,** gdzie dowolna różniczkowalna funkcja $f(r)$ zależy tylko od długości wektora **r**, we współrzędnych kartezjańskich, cylindrycznych (walcowych) oraz sferycznych.

8. Sprawdzić następujące operacje w różnych (kartezjańskim, cylindrycznym, sferycznym) układach współrzędnych:
   grad $r^n = n\, r^{n-2}\, \mathbf{r}$, n=0,+1,+2,...,   div $\mathbf{r}$=3,   rot $\mathbf{r}$=0 ,   div $\mathbf{w} = 2/r$,
   rot $\mathbf{w} = 0$,   gdzie $\mathbf{w} = \mathbf{r}/r$.
9. Obliczyć grad ($\mathbf{er}$),   grad($\mathbf{er}/r^3$), ($\mathbf{e}\bullet\nabla$) $\mathbf{r}$,   div($\mathbf{e}\times\mathbf{r}$),   rot($\mathbf{e}\times\mathbf{r}$), $\mathbf{e}$ -stały wektor.
10. Obliczyć grad($\mathbf{A}\bullet\mathbf{B}$), div($f\mathbf{A}$), rot($f\mathbf{A}$), gdy $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ i f zależą tylko od długości wektora $\mathbf{r}$.
11. Obliczyć we współrzędnych cylindrycznych i sferycznych: grad $f(r)$, $\Delta f(r)$, div $\mathbf{A}(r)$, rot $\mathbf{A}(r)$, funkcje $f(r)$ i $\mathbf{A}(r)$ zależą tylko od r ($r = \rho$ – dla współrzędnych cylindrycznych).
12. Pokazać, że
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\,\Phi\right)$$
13. Niech $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ będzie wektorem o stałym kierunku. Udowodnić, że rot $\mathbf{A}$ jest wektorem ortogonalnym do $\mathbf{A}$.
14. Wykazać, że dla współrzędnych walcowych [ρ,ϕ, z], ∇ln ρ = rot $\mathbf{k}\phi$, gdzie $\mathbf{k}$ jest wersorem osi Z.
15. Posługując się twierdzeniem Gaussa lub jego rozszerzeniami obliczyć całki
   $\mathbf{I} = \oint \mathbf{r}\,(\mathbf{An})\, dS$, $\mathbf{I} = \oint (\mathbf{Ar})\,\mathbf{n}\, dS$,   gdzie $\mathbf{A}$ - stały wektor, oraz $\mathbf{n}\, dS = d\mathbf{S}$.
16. Posługując się twierdzeniem Gaussa wykazać dla dowolnych pól wektorowych $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, który związek jest prawdziwy związek:
$$\int \nabla\cdot\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,dV=\oint \mathbf{B}\,\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} \qquad \text{czy} \qquad \int \nabla\cdot\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,dV=\oint \mathbf{A}\,\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$
   gdzie: $\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\,\mathbf{B}\right)_i=\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(A_jB_i\right)$.
17. W sferycznym układzie współrzędnych znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a zależne jedynie od jednej współrzędnej r.
18. Dana jest funkcja skalarna $f=x^2+y^2+z^2$ oraz pole wektorowe $\mathbf{A} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
   Obliczyć: Δf, $\Delta\mathbf{A}$, $\Delta(f\mathbf{A})$.
19. Obliczyć całkę krzywoliniową , $\oint \mathbf{A}d\mathbf{r}$ wzdłuż okręgu o promieniu a, gdy:
   a). $\mathbf{A} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,   b). $\mathbf{A} = \mathbf{i}\sin y + \mathbf{j}\,(x\cos y)$. Sprawdzić, że rot $\mathbf{A}$=0. Znaleźć taką funkcję U, że grad $U = \mathbf{A}$. Sprawdzić wynik za pomocą twierdzenia Stokesa.
20. Wykazać, że dla dowolnej zamkniętej powierzchni $\oint d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$.
21. Znaleźć dywergencję i rotację pola wektorowego:
   a). $\mathbf{A}= (x + y)\mathbf{i} + (y + 2x)\mathbf{j} + (z + xy)\mathbf{k}$,   b). $\mathbf{A}= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2+y^2)$,
   c). $\mathbf{A}= yz\,\mathbf{i} - zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$,   d). $\mathbf{A}= \sin x\cosh y\,\mathbf{i} - \cos x\sinh y\,\mathbf{j} + (x+y)\,\mathbf{k}$,

e). $\mathbf{A} = \sin x \sinh y\, \mathbf{i} - \cos x \cosh y\, \mathbf{j} + xy\, \mathbf{k}$, f). $\mathbf{A} = (z-y)\, \mathbf{i} + (x-y)\, \mathbf{j} + (x-y)\, \mathbf{k}$.

Określić jakie są to wektory: biegunowy (polarny), osiowy (aksjalny), lub inne.

II.

1. Obliczyć następujące całki:

a. $\int_2^6 (3x^3 - 2x - 1)\delta(x-3)\, dx$, b. $\int_0^5 \cos x\, \delta(x-\pi)\, dx$,

c. $\int_0^3 x^3 \delta(x+1)\, dx$, d. $\int_{-\infty}^{+\infty} \ln(x+3)\delta(x+2)\, dx$

2. Wykazać, że $\delta(kx) = \frac{1}{|k|}\delta(x)$ oraz $\int_0^\infty \delta(x)\, dx = \frac{1}{2}$.

3. Obliczyć następujące całki:

a. $\int_0^3 x^3 \delta(x-3)\, dx$ b. $\int_{-2}^{2} (2x+3)\delta(3x)\, dx$, c. $\int_0^2 (x^3 + 3x + 2)\delta(1-x^2)\, dx$,

d. $\int_{-1}^{1} 9x^2 \delta(3x^2 - 2)\, dx$ e. $\int_{-\infty}^{a} (3x^3 + ax - b)\delta(x-b)\, dx$

4. Wykazać, że ($\varepsilon > 0$)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-\varepsilon k} \cos kx\, dk = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$$

5. Obliczyć granice $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$), gdy $x = 0$ albo $x \neq 0$, oraz całkę

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x,\varepsilon)\, dx$$

dla 1) $\delta(x,\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2}$, 2) $\delta(x,\varepsilon) = \frac{\exp(-x^2/\varepsilon)}{\sqrt{\pi\varepsilon}}$,

oraz granicę $n \to \infty$, gdy $x = 0$ albo $x \neq 0$ dla $\delta(x,n) = \frac{(2n-1)!!}{2^n (n-1)!}\cosh^{-2n} x$. Wykorzystać wzór Stirlinga $n! \approx n^n e^{-n}$.

6. Korzystając z definicji transformaty Fouriera (prostej i odwrotnej) pokazać, że $\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$, oraz korzystając z tej relacji wykazać, że $\delta(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\pi}\frac{\sin kx}{x}$.

7. Wykorzystując rozwiązania równania falowego d'Alemberta wyznaczyć relatywistyczny 4-potencjał $A^\mu(\mathbf{r},t) = [\varphi(\mathbf{r},t), \mathbf{A}(\mathbf{r},t)]$ (potencjał Liénarda-Wiecherta) wytwarzany przez jeden

ładunek punktowy *e* wykonujący zadany ruch, określony równaniem **r**’ = $\mathbf{r}_0(t')$. Najpierw przyjmując, że $\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}$, wykazać związek:

$$\delta\left(t - t' + \tfrac{1}{c}\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')\right|\right) = \frac{\delta(t-t')}{\dfrac{d}{dt'}\left[t' - t + \tfrac{1}{c}\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')\right|\right]}.$$

III

1. Na podstawie wzorów transformacji Lorentza określających przejście czterowektora A^μ w czterowektor A^{μ}’ wyznaczyć:
   1) zależności dla dylatacji czasu,
   2) zależności dla skrócenia odległości, tzw. skrócenia Lorentza-Fitzgeralda,
   3) relatywistyczne prawo składania prędkości.
2. Wykazać, że element czaso-przestrzeni $d\Omega = c\,dt\,dx\,dy\,dz$ jest niezmiennikiem (inwariantem) transformacji Lorentza.
3. Wykonać transformacje Lorentza dla:
   1) czterowektora prądu,
   2) czterowektora falowego.
4. Wykazać, że ładunek *q* zawarty w przestrzeni V jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.
5. Czas własny rozpadu mezonów π^+ wynosi $t_w = 2{,}2\cdot10^{-8}$ s. Jakie są czasy rozpadu t_r tych cząstek poruszających się z prędkościami (β = v/c) β = 0,6; 0,886; 0,99? Jakie drogi l_r przelecą te cząstki w czasie t_r ? Jakie byłyby drogi l_n, gdyby nie uwzględniać dylatacji czasu?
6. Ziemia krąży wokół Słońca z prędkością v = $3\cdot10^4$ m/s. Obliczyć o ile sekund ulega skrócenia czas ziemski po 100 okrążeniach Ziemi wokół Słońca. Przyjąć c = $3\cdot10^8$ m/s.
7. Uwzględniając, że transformacja obrotu $C_\alpha{}^\beta$ w 4-wymiarowej przestrzeni to transformacja liniowa taka, że: $A_\alpha = C_\alpha{}^\beta A'_\beta$ i $A^\alpha = C^\alpha{}_\beta A'^\beta$, oraz że kwadrat 4-wektora $A_\alpha A^\alpha$ jest inwariantem dla transformacji obrotu ($A_\alpha A^\alpha = A'_\beta A'^\beta$) wykazać, że spełniona jest relacja ortogonalności: $C^\gamma{}_\alpha\, C_\gamma{}^\beta = \delta^\beta_\alpha$.
8. Na podstawie poprzedniego zadania wykazać, że: $A'_\alpha = C^\beta{}_\alpha A_\beta$ i $A'^\alpha = C_\beta{}^\alpha A^\beta$, oraz z faktu, że kwadrat 4-wektora $A'_\alpha A'^\alpha$ jest inwariantem dla transformacji obrotu ($A'_\alpha A'^\alpha = A_\beta A^\beta$) wykazać, że spełniona jest druga relacja ortogonalności: $C_\alpha{}^\gamma\, C^\beta{}_\gamma = \delta^\beta_\alpha$.
9. Uwzględniając transformacje liniowe $A_\alpha = C_\alpha{}^\beta A'_\beta$, $A^\alpha = C^\alpha{}_\beta A'^\beta$, $A'_\alpha = C^\beta{}_\alpha A_\beta$, $A'^\alpha = C_\beta{}^\alpha A^\beta$ oraz relacje ortogonalności: $C^\gamma{}_\alpha\, C_\gamma{}^\beta = \delta^\beta_\alpha$ oraz $C_\alpha{}^\gamma\, C^\beta{}_\gamma = \delta^\beta_\alpha$ pokazać, że $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} = C^\alpha{}_\beta \dfrac{\partial}{\partial x'_\beta}$ oraz $\dfrac{\partial}{\partial x'_\alpha} = C_\beta{}^\alpha \dfrac{\partial}{\partial x_\beta}$.
10. Wykazać, że wyrażenia postaci: $\dfrac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha}$, oraz równanie ciągłości $\dfrac{\partial j^\lambda}{\partial x^\lambda} = 0$ i cechowanie Lorentza $\dfrac{\partial A_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$ są niezmiennicze względem transformacji grupy obrotów w czasoprzestrzeni, j^λ – 4-wektor prądu.

11. Sprawdzić niezmienniczość względem transformacji grupy obrotów w czasoprzestrzeni relatywistycznego równania Newtona (dla naładowanej cząstki w polu elektromagnetycznym, uwzględniając siłę Lorentza) $\frac{d\,p^{\mu}}{d\,s} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_{\nu}$.
12. Wykazać niezmienniczość równań Maxwella względem transformacji grupy obrotów w czasoprzestrzeni (zadanie 9) wykorzystując 4-wymiarową postać równań Maxwella:
$$e^{\kappa\lambda\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} F_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu},$$
gdzie $F^{\mu\nu}$ – 4-tensor pola elektromagnetycznego, j^{μ} – 4-wektor prądu.

13. Wykazać niezmienniczość różniczkowych równań ciągłości dla gęstości energii i gęstości pędu pola elektromagnetycznego względem transformacji grupy obrotów w czasoprzestrzeni wykorzystując ich 4-wymiarowe postaci:
$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_{\nu},$$
gdzie $T^{\mu\nu}$ – 4-tensor energii i pędu pola elektromagnetycznego.

14. Wykazać, że wyrażenia postaci: $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ i $F_{\kappa\lambda}\, \varepsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu}$ są niezmiennikami względem transformacji grupy obrotów.
15. Wykazać, że równanie falowe d'Alemberta
$$\frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x_{\nu}} = \frac{4\pi}{c} j^{\mu}, \quad \text{gdzie } A^{\mu} = [\varphi, \mathbf{A}]$$
jest niezmiennicze względem transformacji grupy obrotów.

16. Zakładając, że obrót zachodzi tylko w płaszczyźnie $x^0 x^1$ zdefiniować postać tensora transformacji obrotu $C_{\alpha}{}^{\beta}$, oraz wykorzystując relacje ortogonalności $C^{\gamma}{}_{\alpha}\, C_{\gamma}{}^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$ i $C_{\alpha}{}^{\gamma}\, C^{\beta}{}_{\gamma} = \delta_{\alpha}^{\beta}$ wyznaczyć jawną postać szczególnej transformacji Lorentza. Przyjąć, że $\frac{C_0{}^1}{C_0{}^0} = \beta$ oraz zasadę, że zmiana znaku elementów tensora $C_{\alpha}{}^{\beta}$ zachodzi tylko przy podnoszeniu lub opuszczaniu indeksów przestrzennych (1,2,3).

IV

1. Pokazać, że gdy pole $\mathbf{H} = H\,\mathbf{k}$ to $\mathbf{A} = Hx\,\mathbf{j}$ lub $\mathbf{A} = -Hy\,\mathbf{i}$, oraz że gdy $\mathbf{E} = E\,\mathbf{i}$ to $\varphi = -Ex$, gdzie pola H i E są stałe i jednorodne.
2. Znaleźć potencjały i rozważyć ich cechowanie we współrzędnych kartezjańskich i cylindrycznych a). $\mathbf{H} = H\mathbf{z}$, $H = const$ b). $\mathrm{H} = bt\,\mathbf{z}$, $b = \mathrm{const}$.
3. Wyznaczyć energię potencjalną U jednorodnie naładowanej sfery o promieniu R i całkowitym ładunku Q. ($U = Q^2/2R$)
4. Wykorzystując wynik zad. 3 wyznaczyć energię potencjalną układu dwóch naładowanych cząstek – kul o promieniach r i R, i ładunkach q i Q, znajdujących się w odległości $\rho > r + R$.
5. Wykazać, że w nieskończonym ośrodku (nieograniczonym) o skończonej (niezerowej) konduktywności σ nie może istnieć trwały i stały w czasie rozkład ładunków elektrycznych (wykorzystać $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ - prawo Ohma).

6. Wykazać, że dla stałego pola magnetycznego $\mathbf{H} = H\mathbf{z}$ zamkniętego w nieskończonym solenoidzie o promieniu R, potencjał we współrzędnych cylindrycznych wyraża się następująco: $A_\rho = A_z = 0$ oraz $A_\phi = \frac{H}{2}\left[\frac{\rho}{2}Y(R-\rho) + \frac{R^2}{\rho}Y(\rho - R)\right]$, gdzie $Y(x)$ oznacza funkcję Heaviside'a. Wyznaczyć natężenie pola magnetycznego wewnątrz i na zewnątrz solenoidu.
7. Pokazać, że jeżeli wielkości fizyczne są określone za pomocą funkcji zespolonych np. $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ oraz $\mathbf{H}(t) = \mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$, gdzie $\mathbf{E}_0$ i $\mathbf{H}_0$ są stałymi zespolonymi wektorami, to średnia po czasie z iloczynu skalarnego ich części rzeczywistych wyraża się następująco: $\overline{\mathrm{Re}\,\mathbf{E}(t)\cdot\mathrm{Re}\,\mathbf{H}(t)} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{H}_0^*$, w szczególności $\overline{\mathrm{Re}\,\mathbf{E}(t)\cdot\mathrm{Re}\,\mathbf{E}(t)} = \frac{1}{2}\left|\mathbf{E}_0\right|^2$.
8. Pole elektryczne w betatronie wyraża się wzorem $\mathbf{E} = \mathbf{z}\, kt/\rho$, k – stała, t – czas, ρ – współrzędna cylindryczna. Obliczyć pole magnetyczne. Sprawdzić, że **H** jest bezźródłowe i wirowe (div **H**=0, rot **H** $\neq$ 0). Znaleźć potencjały dla pól **E** i **H**.
9. Określić długość fali fotonu, którego energia odpowiada relatywistycznej energii spoczynkowej masy Ziemi.
10. Wyznaczyć potencjał i natężenie w punkcie P od jednorodnie naładowanego odcinka o zadanej długości l.
11. Fala płaska o częstości ω rozchodzi się w próżni w kierunku **n**: $\mathbf{n} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})/\sqrt{14}$. Wiedząc, że **E** jest równoległe do płaszczyzny XY znaleźć równanie opisujące wektory fali **E** i **H** oraz **A**.
12. Wypisać potencjał zespolony W jednorodnego pola elektrycznego o natężeniu **E**. Rozpatrzyć przypadek szczególny pola elektrycznego wytwarzanego przez powierzchnię o gęstości powierzchniowej ładunku σ.
13. Wykorzystując wzór $\mathbf{m} = \frac{1}{2}\sum e\mathbf{r}\times\mathbf{v}$ wyznaczyć moment magnetyczny kołowej ramki o promieniu R, w której płynie prąd o natężeniu I.
14. Wypisać równanie różniczkowe, które spełnia potencjał $V = q\exp(-r/a)/r$. Wielkości q i a stałe.
15. Znaleźć potencjał i siłę Coulomba w n-wymiarowej przestrzeni. Objętość n-wymiarowej kuli wynosi $\Omega_n = R^n\pi^{n/2}/(n/2)!$, powierzchnia jest równa $S_n = d\Omega_n/dR$. Ponadto $(½)! = \sqrt{\pi}$.
16. Rozwiązać równanie różniczkowe opisujące precesję Larmora

$$\frac{d\,\mathbf{M}}{d\,t} = -\mathbf{\Omega}\times\mathbf{M}, \qquad \text{gdzie} \quad \mathbf{\Omega} = \frac{e}{2mc}\mathbf{H} \qquad \text{jest częstością Larmora.}$$

V

1. Niech Y(x) oznacza funkcję Heaviside'a. Obliczyć w sensie teorii dystrybucji:

   a). $(\frac{d}{dx} - k)\,Y(x)\,e^{kx}$, b). $(\frac{d^2}{dx^2} + q^2)Y(x)\sin(qx)/q$, c). $\frac{d^m}{dx^m}Y(x)\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}$.
2. Obliczyć w sensie teorii dystrybucji wszystkie pochodne $\frac{d^k}{dx^k}|x|$ funkcji $|x|$.
3. Wykazać, że $(\partial/\partial x + i\,\partial/\partial y)/(x + iy) = 2\pi\,\delta(x + iy)$.
4. Wykazać, że dla n-wymiarowej przestrzeni R^n:

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = 0 \quad \text{dla} \quad r \neq 0\,, \quad \text{gdzie} \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial\, x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial\, x_n^2} \quad \text{oraz} \quad r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}\,.$$

5. Wyznaczyć postać wyrażenia:

$$\Delta \frac{1}{r^{n-2}} = -(n-2)\, S_n \delta(\mathbf{r}) \quad \text{dla} \quad n = 2\,,$$

gdzie $S_n = 2\pi^{\frac{n}{2}} / \Gamma(\frac{n}{2})$ jest powierzchnią n-wymiarowej sfery.

6. Przykłady z podręcznika III: rozdz. IX, § 2, s. 263, przykłady 1, 2, 3, 4 oraz rozdz. IX, § 4, s. 266, przykłady 1, 2, gdzie $t = t' + \frac{1}{c}\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')\right|$.

7. Szereg trygonometryczny $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ jest zbieżny w klasycznym sensie do funkcji okresowej $\frac{\pi - x}{2}$ o okresie 2π, określonej dla $0 < x < 2\pi$. Wykorzystując funkcję Heaviside'a $\mathrm{Y}(x)$ zapisz rezultat sumowania szeregu dla dowolnego x, $-\infty < x < \infty$. Znajdź pochodną dystrybucyjną tej funkcji.

TEMATY DO OPRACOWANIA

1. Funkcje pola
   I – § 9 rozdz. 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74   s. 205-214
2. Funkcje pola we współrzędnych krzywoliniowych
   I – § 8 rozdz. 66, 67   s. 190-192,   I - § 14 rozdz. 103, 104   s. 305-309
3. Funkcje pola we współrzędnych krzywoliniowych c.d.
   I – § 14 rozdz.105, 106, 107   s. 309-314
4. Funkcje pola we współrzędnych krzywoliniowych przykłady
   I – § 14 przykład 1, 2, 3, 4   s. 314-316
5. Dywergencja
   I – § 11 rozdz. 78, 79, 82   s. 231-236 i 238-240
6. Wzory Greena i niezmienniki pola
   I – § 11 rozdz. 80 i 83   s. 236-237 i 240-242
7. Rotacja (tylko na płaszczyźnie)
   I – § 12 rozdz. 84-85 i 88-89   s. 251-255 i 258-262
8. Funkcja delta Diraca
   II – rozdz. 1.5 s. 65-69, 70-71,
   III – § 12 rozdz. 1 s. 34-39,   III - dodatek 6   s. 437-442
9. Równanie Poissona i jego rozwiązanie
   I – § 14 rozdz. 111   s. 288-292

10. Prędkość światła

    IV – par. 42-3   s. 403-407,   V – rozdz. 12.4   s. 581-589

    https://www.youtube.com/watch?v=abqgCsJx4SE

11. Doświadczenie Michelsona i Morleya; przestrzeń czterowymiarowa

    III – rozdz. 12, § 1 – 2 s. 307-309,   V – rozdz. 12.5 s. 600-604 (przykład)

12. Interwał czasoprzestrzenny – niezmiennik transformacji

    VI – rozdz.1 § 2   s. 14-18

L I T E R A T U R A

I E. Karaśkiewicz – zarys teorii wektorów i tensorów

II D.J. Griffiths – Podstawy elektrodynamiki

III M. Suffczyński – elektrodynamika

IV D. Holliday, R. Resnick – fizyka t. II

V W. Bolton – zarys fizyki, cz. 2

VI L.D, Landau, E.M. Lifszic – teoria pola – fizyka teoretyczna

VII L.D. Landau, E.M. Lifszic – krótki kurs fizyki teoretycznej, tom 1 mechanika, elektrodynamika

Uzupełnienia:

VIII J.D. Jackson – elektrodynamika klasyczna

IX B. Konorski – elementy teorii względności, relatywistycznej mechaniki i elektrodynamiki

X J. Górski, S. Brychczy, T. Czarliński, B. Główczyńska, D. Węglowska W. Woźniak
– wybrane działy matematyki stosowanej

XI L.G. Grieczko, W.I. Sugarow, O.F. Tomasiewicz, A.M. Fiedorcienko
– zadania z fizyki teoretycznej

XII A. Januszajtis – fizyka dla politechnik, t. I cząstki

XIII A. Januszajtis – fizyka dla politechnik, t. II pola

XIV F. Rohrilch – klasyczna teoria cząstek naładowanych

XV A.L. Fetter, J.D. Walecka – kwantowa teoria układów wielu cząstek

XVI I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendiajew – Matematyka poradnik encyklopedyczny

XVII B.F. Schulz – Wstęp do ogólnej teorii względności

XVIII K.A. Meissner – Klasyczna teoria pola

XIX R. Sikora – teoria pola elektromagnetycznego

Prowadzący zajęcia: Prof. dr hab. inż. Ryszard Gonczarek, Dr hab. inż. Grzegorz Harań.