LISTA I
RACHUNEK WEKTOROWY; KINEMATYKA; DYNAMIKA

1. Dane są dwa wektory: **a**=3**i** + 4**j** - 5**k** oraz **b**=-**i** + 2**j**+6**k**. Wyznaczyć :
a) długość każdego wektora, b) iloczyn skalarny **a b**, c) kąt pomiędzy wektorami (**a**-**b**) i (**a**+**b**)
2. Wektory **a** i **b** spełniają relacje: **a** + **b** =11**i** -**j** + 5**k** ; **a** - 5**b**=-5**i** +11**j** +9**k**.
Wyznaczyć wektory **a** i **b**. Czy wektory te są do siebie równoległe lub prostopadłe?

3. Dane są dwa wektory **a**=3**i**+4**j** oraz **b**=6**i**+16**j**. Rozłożyć wektor **b** na składową równoległą do wektora **a** oraz składową prostopadłą.

4. Dany jest wektor **a**=7**i** +11**j**.Wyznaczyć wektor jednostkowy prostopadły do wektora **a.**

5. Udowodnij podane zależności, rozkładając wektory na składowe:
a) $\bar{a}\times\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$,
b) $l\cdot\bar{a}\times\bar{b}=l\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)$,
c) $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)\cdot\bar{c}$,
d) $\bar{a}\times\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)=\bar{b}\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\right)-\bar{c}\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right)$,
e) $\bar{a}\times\bar{a}=0$,
f) $\bar{a}\cdot\left(\bar{a}\times\bar{b}\right)=0$.
6. Dwie cząstki zostały wysłane z początku układu współrzędnych i po pewnym czasie ich przemieszczenia wynoszą: $\bar{r}_1=4\bar{i}+3\bar{j}+8\bar{k}$, $\bar{r}_2=2\bar{i}+10\bar{j}+5\bar{k}$. Znaleźć:
a) długość każdego wektora,
b) wektor przemieszczenia cząstki drugiej względem cząstki pierwszej,
c) kąty między wszystkimi parami tych trzech wektorów,
d) rzut wektora $\bar{r}_2$ na $\bar{r}_1$,
e) iloczyn wektorowy $\bar{r}_1\times\bar{r}_2$.

7. Wyznacz pierwsze i drugie pochodne następujących funkcji:
a) $y=Bt^2+Ct$
b) $x=Ae^{-\alpha t}$
c) $x=A\cos(\omega t+\delta)$
d) $x=A\cos[\varphi(t)]$

8. Wyznacz całki nieoznaczone:
a) $F(t)=\int dt$
b) $F(t)=\int t\,dt$
c) $F(t)=\int (At+B)dt$
d) $F(t)=\int \frac{1}{a+bt}dt$
e) $F(t)=\int \exp(-\alpha t)dt$
f) $F(t)=\int \cos[\omega t]dt$

9. Ciało swobodnie spadające pokonuje połowę drogi w ciągu ostatniej sekundzie ruchu. Z jakiej wysokości spada to ciało?
10. Prędkość łódki względem wody wynosi v. Jak należy skierować łódź, aby przepłynąć rzekę w kierunku prostopadłym do brzegu? Woda w rzece płynie z prędkością u.
11. Rowerzysta jechał przez godzinę z prędkością v_1=25 km/h, a następne 20 km z prędkością v_2=15 km/h. Oblicz prędkość średnią rowerzysty.
12. Piłkarz wykonujący rzut wolny z punktu leżącego na wprost bramki, w odległości 50m od niej, nadaje piłce prędkość początkową o wartości 25m/s. Wyznacz zakres kąta, pod jakim powinna zostać uderzona piłka, aby strzał trafił do bramki. Poprzeczka bramki znajduje się na wysokości 3,44m nad boiskiem.
13. Dwa samochody poruszają się po dwóch prostoliniowych i wzajemnie prostopadłych drogach w kierunku ich przecięcia ze stałymi szybkościami v_1=50km/h i v_2=100km/h. Przed rozpoczęciem ruchu pierwszy samochód znajdował się w odległości s_1=100km od skrzyżowania dróg, a drugi w odległości s_2=50km od skrzyżowania. Po jakim czasie od rozpoczęcia ruchu odległość pomiędzy samochodami będzie najmniejsza?
14. Po rzece płynie łódka ze stałą względem wody prędkością u, prostopadłą do nurtu. Woda w rzece płynie wszędzie równolegle do brzegów, ale wartość jej prędkości v zależy od odległości y od brzegu: $v=v_0\sin(y/L)$, gdzie v_0 jest stałą, a L jest szerokością rzeki. Znaleźć:
   a) wektor prędkości łódki względem brzegu
   b) kształt toru łódki
   c) odległość, na jaką woda zniosła łódkę w dół rzeki
15. Rybak płynie łodzią w górę rzeki. Przepływając pod mostem gubi jedną z wędek; po godzinie zauważa brak wędki. Zawraca i dogania wędkę sześć kilometrów poniżej mostu. Jaka jest prędkość prądu rzeki jeżeli rybak wkłada tyle samo wysiłku w wiosłowanie płynąc w górę i w dół rzeki.
16. Ruch punktu materialnego opisują równania:

   $$x = At$$

   $$y = Bt^2 + Ct$$

   Wyznaczyć:
   a) tor ruchu
   b) współrzędne kartezjańskie prędkości, przyspieszenia oraz ich wartości
   c) składowe styczną i normalną przyspieszenia
   d) wektor jednostkowy styczny do toru w chwili t

17. Napisać i rozwiązać równania ruchu ciała o masie m pod wpływem stałej siły $\overline{F_0}$.
18. Na ciało o masie m działa siła hamująca: $F = -bv$ **. Z**naleźć zależność prędkości ciała w funkcji czasu. Jaką drogę przebędzie ciało do chwili zatrzymania?
19. Na kulkę wrzuconą do wody działają następujące siły: siła ciężkości P=mg, siła wyporu $F_W = -\rho gV$, oraz siła oporu $F_O = -kv$, gdzie V jest objętością kulki, v jej prędkością, ρ gęstością wody a k pewnym współczynnikiem proporcjonalności. Opisać ruch kulki. Wyznaczyć prędkość jako funkcję czasu.
20. Samochód o masie m napędzany jest siłą wypadkową, która zmienia się w czasie według równania $F(t)=C\cdot t^2$, gdzie C jest pewną stałą. Jak będzie się zmieniać prędkość samochodu w czasie?
21. Z wierzchołka gładkiej kuli o promieniu R zsuwa się bez tarcia małe ciało. Wyznaczyć położenie punktu, w którym wspomniane ciało oderwie się od powierzchni kuli.
22. Ciało wyrzucono z powierzchni Ziemi z prędkością początkową $v_0 = 20m/s$ skierowaną pod kątem $\alpha = 60^o$ do poziomu. Wychodząc z równania ruchu i warunków początkowych, wyznaczyć:

a) parametryczne równanie ruchu
b) równanie toru
c) wektory prędkości, przyspieszenia stycznego, normalnego i całkowitego po upływie 1 s .

23. Kamień o masie m wrzucono z prędkością v_0 do studni, w której poziom wody znajduje się na głębokości d . Zakładamy, że kamień w powietrzu spada swobodnie, w wodzie działa natomiast na niego siła oporu proporcjonalna do prędkości $\overline{F} = -k\overline{v}$. Znaleźć zależność położenia, prędkości i przyspieszenia kamienia od czasu.
24. Dwa ciała o masach M i m powiązane nierozciągliwą nicią umieszczono na równi pochyłej. Wyznaczyć przyspieszenia ciał i siły naciągu nici. Tarcie pomiędzy nicią a bloczkiem zaniedbać. Współczynnik tarcia wynosi f, a kąty pomiędzy równią i podłożem wynoszą α i β
25. Jaki powinien być minimalny współczynnik tarcia pomiędzy oponami samochodu a jezdnią, aby samochód mógł przejechać bez poślizgu zakręt o promieniu R=100m z prędkością v=80km/h? Jezdnia nachylona jest pod katem α=30 do poziomu.