Wzory matematyczne

Na podstawie: D. Halliday, R. Resnick, J. Walker,
Podstawy Fizyki, tom 1, dodatek E, PWN, Warszawa 2003
Opracował mgr inż. Karol Tarnowski

Symbole matematyczne

$=$ równa się
$\approx$ równa się w przybliżeniu
$\sim$ jest tego samego rzędu wielkości
$\neq$ nie jest równe
$\equiv$ jest równe tożsamościowo, jest zdefiniowane jako
$>$ jest większe niż ($\gg$ jest dużo większe niż)
$<$ jest mniejsze niż ($\ll$ jest dużo mniejsze niż)
$\geqslant$ jest większe lub równe (czyli nie mniejsze niż)
$\leqslant$ jest mniejsze lub równe (czyli nie większe niż)
$\pm$ plus albo minus
$\propto$ jest proporcjonalne do
Σ suma
$x_{\text{śr}}$ wartość średnia x

Geometria

Koło o promieniu r: obwód $= 2\pi r$; pole powierzchni $= \pi r^2$.
Kula o promieniu r: pole powierzchni $= 4\pi r^2$, objętość $= \frac{4}{3}\pi r^3$.
Walec obrotowy o promieniu podstawy r i wysokości h: pole powierzchni $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$; objętość $= \pi r^2 h$.
Trójkąt o podstawie a i wysokości h: pole powierzchni $= \frac{1}{2}ah$.

Iloczyny wektorów

Niech $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$ i $\hat{\mathrm{k}}$ będą wektorami jednostkowymi kierunków x, y i z. Zachodzą związki:

$$\hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{k}} = 1, \qquad \hat{\mathrm{i}}\cdot\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{j}}\cdot\hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{k}}\cdot\hat{\mathrm{i}} = 0,$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{k}} = 0,$$

$$\hat{\mathrm{i}}\times\hat{\mathrm{j}} = \hat{\mathrm{k}}, \qquad \hat{\mathrm{j}}\times\hat{\mathrm{k}} = \hat{\mathrm{i}}, \qquad \hat{\mathrm{k}}\times\hat{\mathrm{i}} = \hat{\mathrm{j}}.$$

Dowolny wektor $\vec{a}$ o składowych wzdłuż osi x, y i z równych a_x, a_y i a_z można przedstawić w postaci

$$\vec{a} = a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}.$$

Niech $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ będą dowolnymi wektorami o długościach (modułach) a, b i c. Zachodzą związki:

$$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b}) + (\vec{a}\times\vec{c}),$$

$$(s\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(s\vec{b}) = s(\vec{a}\times\vec{b}) \qquad (s \text{ — skalar}).$$

Niech θ będzie mniejszym z kątów między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Zachodzą związki:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta,$$

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathrm{i}}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \hat{\mathrm{j}}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \hat{\mathrm{k}}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - b_y a_z)\hat{\mathrm{i}} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{\mathrm{j}} + \\ &+ (a_x b_y - b_x a_y)\hat{\mathrm{k}},\end{aligned}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = ab\sin\theta,$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}.$$

Wzory Cramera

Układ równań z dwiema niewiadomymi x i y

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \qquad \text{oraz} \qquad a_2 x + b_2 y = c_2$$

ma rozwiązanie

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

oraz

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Równanie kwadratowe i jego rozwiązanie

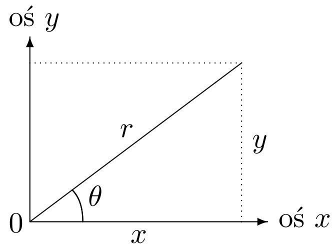
Jeśli $ax^2 + bx + c = 0$, to $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Funkcje trygonometryczne kąta θ

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

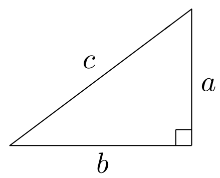
$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{ctg}\theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{r}{x} \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y}$$



Twierdzenie Pitagorasa

W trójkącie prostokątnym $a^2 + b^2 = c^2$.



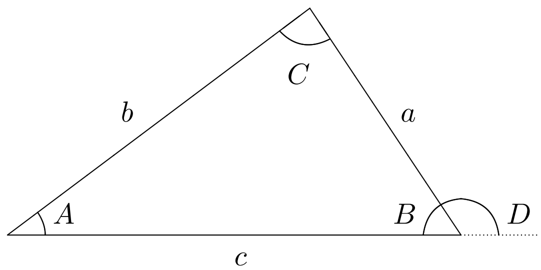
Trójkąty

Kąty: A, B, C.
Boki im przeciwległe: a, b, c.
$A + B + C = \pi$.

$\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c}$.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Kąt zewnętrzny $D = A + C$.



Tożsamości trygonometryczne

$$\sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$$

$$\sin\theta / \cos\theta = \operatorname{tg}\theta$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = 1$$

$$\operatorname{cosec}^2\theta - \operatorname{ctg}^2\theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Pochodne

W poniższych wzorach u i v są dowolnymi funkcjami zmiennej x, a a i m są stałymi.

Pochodne:

1. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1$
2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(au) = a\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u + v) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$
4. $\dfrac{\mathrm{d}x^m}{\mathrm{d}x} = mx^{m-1}$
5. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \dfrac{1}{x}$
6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
7. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$
8. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$
9. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$
10. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{tg} x = \sec^2 x$
11. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{ctg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$
12. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x = \operatorname{tg} x \sec x$
13. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{ctg} x \operatorname{cosec} x$
14. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
15. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin u = \cos u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
16. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos u = -\sin u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

Rozwinięcia funkcji w szeregi potęgowe

$$(1+x)^n = 1 + \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \ldots \qquad (x^2 < 1)$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots \qquad (|x| < 1)$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots \qquad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots \qquad (\theta \text{ w radianach})$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \ldots \qquad (\theta \text{ w radianach})$$

Całki

W poniższych wzorach u i v są dowolnymi funkcjami zmiennej x, a a i m są stałymi. Do każdej z całek nieoznaczonych należy dodać dowolną stałą całkowania.

1. $\int \mathrm{d}x = x$
2. $\int au\mathrm{d}x = a\int u\mathrm{d}x$
3. $\int (u+v)\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}x + \int v\mathrm{d}x$
4. $\int x^m\mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \qquad (m \neq -1)$
5. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$
6. $\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = uv - \int v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$
7. $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$
8. $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x$
9. $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x$
10. $\int \mathrm{tg}\, x\mathrm{d}x = \ln|\sec x|$
11. $\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$
12. $\int \mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax}$
13. $\int x\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^2}(ax+1)\mathrm{e}^{-ax}$
14. $\int x^2\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2+2ax+2)\mathrm{e}^{-ax}$
15. $\int_0^\infty x^n\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x = \frac{n!}{a^{n+1}}$
16. $\int_0^\infty x^{2n}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{2^{n+1}a^n}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$
17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$
18. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$
19. $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\,(x^2+a^2)^{1/2}}$
20. $\int_0^\infty x^{2n+1}\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{n!}{2a^{n+1}} \qquad (a > 0)$
21. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x+a} = x - a\ln(x+a)$

Uwagi

Obszerniejsze tablice dostępne na stronach: `http://pl.wikipedia.org/wiki/Tablica_całek`, `http://www.math.com/tables/integrals/tableof.htm` a także w literaturze:

1. Matematyka. Poradnik encyklopedyczny I. N. Bronsztejn, K. A. Siemiendiajew
2. Inegrały i riady specjalnyje funkcii, A. P. Prudnikow, Ju. A. Bryczkow, O, I. Mariczew
3. Handbook of Mathematical Functions, Abramowitz, Stegun
4. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review, G. Korn, T. Korn
5. Tables of Integrals and Other Mathematical Data: H. Dwight

Generator całek online:
`http://integrals.wolfram.com/`

Wrocław, 12.10.2009