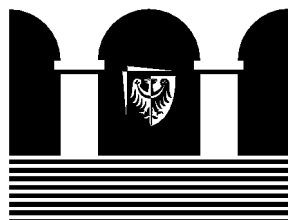


**Politechnika
Wrocławska**



Instytut Fizyki

MECHANIKA I TERMODYNAMIKA

Internetowy zbiór zadań z fizyki
dla studentów Politechniki Wrocławskiej

**Włodzimierz Salejda
Michał H. Tyc**

Wrocław, październik 2001

Zbiór zadań obejmuje zagadnienia metodologii fizyki, kinematyki i dynamiki ruchu postępowego i obrotowego, zasad zachowania, pola grawitacyjnego, statyki, dynamiki płynów, szczególnej teorii względności, fal mechanicznych oraz podstaw termodynamiki.

You do not know anything until you have practiced
Richard P. Feynman (1918–1986)

Spis treści

1. Metodologia fizyki	5
2. Kinematyka	7
3. Dynamika	10
4. Nieinercjalne układy odniesienia	12
5. Praca i energia	13
6. Zasada zachowania pędu	15
7. Dynamika bryły sztywnej. Zasada zachowania momentu pędu	17
8. Pole grawitacyjne. Statyka	20
9. Dynamika płynów	21
10. Drgania	22
11. Termodynamika	23
12. Ruch falowy	25
13. Szczególna teoria względności	27

1. Metodologia fizyki

1-1. Oszacować swój własny wiek w sekundach. Jaki to stanowi ułamek wieku Wszechświata?

1-2. Opona samochodowa jest technologicznie przygotowana do przejechania $7,5 \cdot 10^4$ km. Oszacować, ile wykona obrotów, zanim zostanie zużyta.

1-3. Masa Saturna wynosi $M_S = 5,64 \cdot 10^{26}$ kg, a jego promień $R_S = 6 \cdot 10^7$ m. Czy planeta ta pływałaby na powierzchni hipotetycznego oceanu wodnego?

1-4. Oszacować masę 10^3 jednakowych stalowych kuleczek o średnicy 1 mm. Ile atomów żelaza zawiera pojedyncza stalowa kulka? Gęstość żelaza $7,86 \text{ g/cm}^3$, a masa atomu żelaza 56 u, gdzie $u = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg.

1-5. Astronomowie używają jednostki długości zwanej parsekiem. Jest to odległość, z jakiej promień orbity Ziemi widać pod kątem 1 sekundy ($1''$). Ile metrów i ile lat świetlnych ma parsek?

1-6. Kwadrat prędkości v^2 ciała poruszającego się z przyspieszeniem a po przebyciu drogi s wynosi $v^2 = k \cdot a^n \cdot s^m$, gdzie k — bezwymiarowa stała. Za pomocą analizy wymiarowej wyznaczyć n i m .

1-7. A i B to wielkości fizyczne. Które z podanych działań są sensowne: $A - B$, $A + B$, A/B , $A \cdot B$, jeśli A i B mają: **(a)** różne, **(b)** identyczne wymiary?

1-8. Okres T drgań wahadła matematycznego wynosi $T = k \cdot l^n \cdot g^m$, gdzie k jest bezwymiarową stałą, l — długością wahadła, g — przyspieszeniem ziemskim. Obliczyć wartości n i m .

1-9. Prawo powszechnego ciążenia Newtona ma postać $F = Gm_1m_2/r^2$, gdzie F — siła grawitacji, m_1 , m_2 — masy oddziałujących ciał, r — odległość między nimi. Jaki jest wymiar G ?

1-10. Okres T obiegu sztucznego satelity wokół planety o gęstości ρ po orbicie położonej bardzo nisko nad jej powierzchnią wynosi $T = k \cdot \rho^n \cdot G^m$, gdzie k jest bezwymiarową stałą, a G — stałą grawitacji. Wyznaczyć wartości n i m .

1-11. **(a)** Sprawdzić zgodność wymiarów we wzorach: $x = v^2/(2a)$; $x = at/2$; $t = \sqrt{2x/a}$, gdzie t — czas, x — położenie, v — prędkość, a — przyspieszenie. **(b)** Prędkość cząstki zależy od czasu jak $v(t) = At - Bt^3$. Jakie są wymiary stałych A i B ?

1-12. Znane są wartości następujących stałych przyrody: prędkości światła $c = 2,998 \cdot 10^8$ m/s, stałej grawitacji $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N \cdot m²/kg² oraz stałej Plancka $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J \cdot s. Posługując się tymi wartościami, utworzyć jednostki (tzw. *jednostki Plancka*): długości, czasu, masy i energii.

1-13. Argument funkcji trygonometrycznej musi być wielkością bezwymiarową. Jeżeli prędkość v cząstki o masie m zależy od czasu t jak $v(t) = A\Omega \sin(\sqrt{k/m}t)$ i wiadomo, że A ma wymiar długości, znajdź wymiary wielkości Ω i k .

1-14. Oszacować: **(a)** Liczbę piłeczek pingpongowych, które można zmieścić w pokoju średniej wielkości; **(b)** Liczbę skurczów serca przeciętnie długo żyjącej Polki (Polaka); **(c)** Liczbę słów (liter) w używanym przez Panią (Pana) podręczniku do Fizyki Ogólnej lub zbiorze zadań.

1-15. Miliarder oferuje Pani (Panu) przekazanie miliarda złotych w jednozłotowych monetach pod warunkiem, że przeliczy je Pani (Pan) osobiście. Czy można zaakceptować tę propozycję? Przyjając założenie, że przeliczenie jednej złotówki trwa 1 sekundę.

1-16. W fizyce używamy często matematycznych przybliżeń. Pokazać za pomocą kalkulatora, że dla małych kątów $\alpha < 20^\circ$ spełniona jest relacja $\text{tg } \alpha \simeq \sin \alpha \simeq \alpha \simeq (\pi \cdot \alpha' / 180^\circ)$, gdzie α jest podany w radianach, a α' w stopniach.

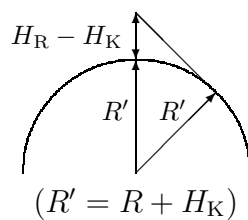
1-17. Rok trwa około $N_1 = \pi \cdot 10^7$ sekund. Obliczyć błąd względny tego przybliżenia. Wskazówka: błąd względny wynosi $100\% \cdot (N_d - N_1)/N_d$, gdzie N_d — dokładna liczba sekund w roku.

1-18. Kropla oleju o masie $9 \cdot 10^{-7}$ kg i gęstości 918 kg/m^3 rozplynęła się po powierzchni wody tworząc kolistą monowarstwę (jest to pojedyncza warstewka molekuł oleju na wodzie) o średnicy 41,8 cm. Oszacować średnicę pojedynczej molekuly oleju.

1-19. Gęstość barionów (tak nazywamy protony i neutrony) we Wszechświecie wynosi obecnie około 0,4 bariona na metr sześcienny. Oszacować: **(a)** Liczbę barionów we Wszechświecie;

(b) Średnią gęstość masy barionowej we Wszechświecie.

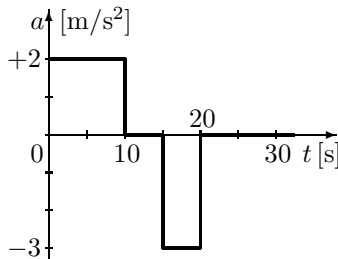
1-20. Czy ze szczytu Rysów o wysokości $H_R = 2499$ m n.p.m. można by było zobaczyć Kraków (przy założeniu, że atmosfera jest idealnie przejrzysta)? Promień Ziemi $R = 6,4 \cdot 10^6$ m. Przyjąć, że Kraków leży na wysokości $H_K = 250$ m n.p.m.



2. Kinematyka

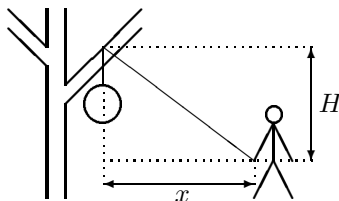
2-1. W chwili $t_1 = 1$ s cząstka poruszająca się ze stałą prędkością po prostej znajduje się w położeniu $x_1 = -3$ m, a w chwili $t_2 = 6$ s w położeniu $x_2 = 5$ m. Korzystając z tych danych narysować wykres położenia cząstki w funkcji czasu. Określić na podstawie wykresu prędkość cząstki.

2-2. Cząstka rozpoczyna ruch przyspieszony z zerową prędkością początkową. Zależność przyspieszenia od czasu przedstawia wykres. Wyznaczyć: **(a)** prędkość cząstki w chwilach $t_1 = 10$ s i $t_2 = 20$ s; **(b)** drogę przebytą przez nią po czasie t_2 .



2-3. Zależność wysokości H wznoszącego się helikoptera od czasu lotu t ma postać $H = 3,0 \cdot t^3$ (w jednostkach SI). Po upływie 2 s od startu z helikoptera zaczyna spadać swobodnie plecak. Po jakim czasie upadnie on na ziemię?

2-4. Harcerz przywiązał do jednego końca liny plecak, linę przerzucił przez konar drzewa odległy od ziemi o H i ruszył do przodu ze stałą prędkością v_h , trzymając za drugi koniec liny (patrz rysunek). Pokazać, że plecak podnosi się z prędkością $v_p = xv_h/\sqrt{x^2 + H^2}$, a jego przyspieszenie wynosi $a_p = H^2v_h^2/(\sqrt{x^2 + H^2})^3$. W jakim czasie plecak zostanie wciągnięty na drzewo? Ile będzie wynosiła wtedy jego prędkość i przyspieszenie chwilowe? Obliczenia wykonać dla wartości $v_h = 2$ m/s, $H = 6$ m.



2-5. Pociąg pasażerski minimalizuje czas przejazdu między stacjami odległymi o 1 km w ten sposób, że w czasie t_1 jedzie z przyspieszeniem $a_1 = 0,1$ m/s², a następnie w czasie t_2 hamuje z przyspieszeniem $a_2 = -0,5$ m/s². Wyznaczyć czas podróży między sąsiednimi stacjami oraz czas t_1 .

2-6. W biegu na 100 metrów Ben Johnson i Carl Lewis przecinają linię mety na *ostatnim wydechu* równocześnie w czasie 10,2 s (bo wiatr wiał im w oczy). Przyspieszając jednostajnie, Ben potrzebuje 2 s, a Carl 3 s, aby osiągnąć maksymalne prędkości, które nie zmieniają się do końca biegu. **(a)** Jakie są maksymalne prędkości oraz przyspieszenia obu sprinterów? **(b)** Jaka jest ich maksymalna prędkość względna? **(c)** Który z nich prowadzi w szóstej sekundzie biegu?

2-7. Prędkość kuli w lufie karabinu zależy od czasu jak $v(t) = 3,0 \cdot 10^5 t - 5,0 \cdot 10^7 t^2$ (w jednostkach SI). Przyspieszenie kuli opuszczającej lufę wynosi zero. Wyznaczyć położenie oraz przyspieszenie kuli wewnątrz lufy. Ile czasu trwa ruch kuli w lufie? Z jaką prędkością pocisk wylatuje z karabinu? Ile wynosi długość lufy?

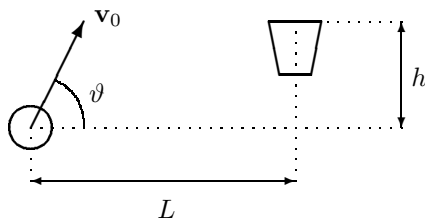
2-8. Piłka golfowa wykonuje na zboczach ruch płaski po torze: $x(t) = 18,0t$, $y(t) = 4,0t - 4,90t^2$ (w jednostkach SI). Wyznaczyć zależność od czasu wektora położenia $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; wynik końcowy sformułować za pomocą wersorów \mathbf{i} i \mathbf{j} . Przeprowadzić takie same wyprowadzenia dla wektorów prędkości i przyspieszenia. Obliczyć \mathbf{r} , \mathbf{v} , \mathbf{a} w chwili $t = 5$ s.

2-9. Cząstka rozpoczyna ruch w chwili $t_0 = 0$ s i porusza się w płaszczyźnie ze stałym przyspieszeniem $\mathbf{a} = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Obliczyć prędkość, szybkość i wektor położenia po upływie czasu $t > t_0$.

2-10. Prędkość cząstki poruszającej się w płaszczyźnie XOY wynosi $\mathbf{v} = (v_x, v_y) = (A, Bx)$, gdzie x — odcięta wektora położenia $\mathbf{r} = (x, y)$, a A i B — stałe współczynniki. Wyznaczyć równanie toru cząstki, tj. zależność $y(x)$.

2-11. Strzelba jest wycelowana w cel wiszący na wysokości H . W tej samej chwili pada strzał i cel zaczyna swobodnie spadać. Pokazać, że kula trafi w cel. W jakiej odległości od strzelby należy umieścić cel, aby kula weń nie trafiła?

2-12. Koszykarz rzuca piłkę z prędkością początkową v_0 pod kątem ϑ do kosza odległego w poziomie o L i w pionie o h od punktu wyrzutu, jak na rysunku. Pokazać, że początkowa prędkość piłki konieczna dla trafienia do kosza dana jest wzorem $v_0^2 = gL/[2 \cos^2 \vartheta (\operatorname{tg} \vartheta - h/L)]$.



2-13. Diego Maradona, stojący na wierzchołku stromego wzniesienia nad brzegiem jeziora o wysokości $H = 40$ m, kopnął poziomo piłkę, która następnie wpadła do wody. Po upływie czasu $t = 3,0$ s usłyszał plusk. Jaka była prędkość początkowa piłki? Prędkość dźwięku w powietrzu $c = 330$ m/s.

2-14. Dwóch pływaków: A i B skacze jednocześnie do rzeki, w której woda płynie z prędkością v . Prędkość c każdego pływaka względem wody jest taka sama (oraz $c > v$). Pływak A przepływa z prądem odległość L i zawraca do punktu startu. Pływak B płynie prostopadle do brzegów rzeki (pomimo znoszącego go prądu) i oddala się na odległość L , po czym zawraca do punktu startu. Który z nich wróci pierwszy?

2-15. Położenie cząstki zależy od czasu jak $\mathbf{r}(t) = A \cos(\Omega t)\mathbf{i} + A \sin(\Omega t)\mathbf{j}$, gdzie A i Ω — stałe. Znaleźć: tor ruchu, prędkość, szybkość i przyspieszenie. Pokazać, że $\mathbf{a} = -\Omega^2 \mathbf{r} = -v^2 \hat{\mathbf{r}}/r$ ($\hat{\mathbf{r}}$ oznacza wektor jednostkowy o kierunku wektora \mathbf{r}).

2-16. Pocisk wystrzelono z prędkością początkową v_0 pod kątem ϑ względem poziomu z działa ustawionego u podnóża wzniesienia o kącie nachylenia $\varphi < \vartheta$. Pokazać, że pocisk przebędzie odległość $d = 2v_0^2 \cos \vartheta \sin(\vartheta - \varphi)/[g \cos^2 \varphi]$, mierzoną wzdłuż wzniesienia.

2-17. Silnik nadaje rakiecie wystrzelonej pod kątem 70° do poziomu przyspieszenie o stałym kierunku i wartości 8 m/s^2 . Po upływie $6,5$ s od startu wyłącza się. Znaleźć zasięg rakiety w poziomie oraz jej maksymalną wysokość.

2-18. Jakie nachylenie (przy założeniu stałej szerokości podstawy) powinien mieć dach domu, aby krople deszczu spływały po nim w najkrótszym czasie?

2-19. Ciało spadające swobodnie przebyło w ostatniej sekundzie ruchu $1/3$ całej drogi. Obliczyć początkową wysokość i całkowity czas ruchu ciała.

2-20. Wyznaczyć składowe prędkości i przyspieszenia w ruchu po torze opisanym równaniami parametrycznymi: $x(t) = A \cos(bt^2)$, $y(t) = B \sin(bt^2)$, gdzie A , B , b — stałe. Podać równanie toru. Określić rodzaj ruchu. Podać sposób obliczania zależności promienia krzywizny toru od czasu.

2-21. Koło o promieniu $R = 0,1$ m obraca się tak, że zależność kąta obrotu φ od czasu t zadaje równanie $\varphi(t) = A + Bt + Ct^3$, gdzie $B = 2 \text{ rad/s}$, $C = 1 \text{ rad/s}^3$. Wyznaczyć dla chwili $t = 10$ s i dla punktów położonych w odległości $R/2$ od osi obrotu: (a) prędkość kątową; (b) prędkość liniową; (c) przyspieszenie styczne, normalne i całkowite.

2-22. Ćma porusza się po krzywej, której długość s dana jest wzorem $s = s_0 \exp(ct)$, gdzie s_0 i c — stałe. Wiedząc, że wektor przyspieszenia \mathbf{a} tworzy stały kąt α ze styczną do toru w każdym jego punkcie, znaleźć wartości: (a) prędkości; (b) przyspieszenia stycznego i normalnego; (c) promienia krzywizny toru jako funkcje długości łuku krzywej.

2-23. Ruch punktu w biegunowym układzie współrzędnych opisują równania: $r(t) = Bt^2$, $\vartheta(t) = At^2$. Wyznaczyć: (a) parametryczne równania toru w kartezjańskim układzie współrzęd-

nych; (b) składową radialną i transwersalną (azymutalną) prędkości oraz szybkość; (c) składową radialną i transwersalną przyspieszenia.

2-24. Parametryczne równania ruchu punktu materialnego mają postać: $x(t) = v_0 t \cos \alpha$, $y(t) = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$. Jaki to rodzaj ruchu? Wyznaczyć: (a) przyspieszenie styczne i normalne w dowolnej chwili t ; (b) zależność krzywizny toru od czasu.

2-25. Tarcza o promieniu R obraca się ze stałą prędkością kątową Ω . Ze środka tarczy wyruszył żółw i idzie wzdłuż promienia ze stałą prędkością v_r . Wyznaczyć: (a) równanie toru żółwia we współrzędnych biegunowych i kartezjańskich; (b) zależność od czasu prędkości transwersalnej i radialnej; (c) zależność od czasu wektora przyspieszenia oraz jego składowych: radialnej i transwersalnej oraz normalnej i stycznej; (d) zależność od czasu promienia krzywizny toru ρ .

2-26. Rybak płynął w górę rzeki. Przepływając pod mostem upuścił do wody wiosło. Po upływie kwadransa zauważył zgubę i zawróciwszy dopędził wiosło w odległości 1 km od mostu. Jaka jest prędkość prądu rzeki, jeżeli rybak płynąc w górę i w dół rzeki wiosłował z jednakowym wysiłkiem? Wskazówka: Rozwiązać zadanie w układzie odniesienia związanym z wiosłem lub rybakim.

2-27. W celu wyznaczenia prędkości v_0 kuli wylatującej z lufy pistoletu dokonano następujących zabiegów: (1) ustawiono naładowany pistolet w odległości x od tarczy; (2) wycelowano go w punkt P na tarczy; (3) oddano strzał i stwierdzono, że pocisk przebił tarczę o Δy poniżej punktu P. Pokazać, że $\Delta y = ax^2$. Wyrazić a jako funkcję przyspieszenia ziemskiego i prędkości początkowej pocisku v_0 . Ile wynosi v_0 , jeśli $\Delta y = 0,21$ m i $x = 50,0$ m?

2-28. Położenie cząstki w funkcji czasu opisuje zależność $\mathbf{r}(t) = bt\mathbf{i} + (c - dt^2)\mathbf{j}$, przy czym $b = 2,00$ m/s, $c = 5,00$ m, $d = 1,00$ m/s². Wyrazić y jako funkcję x oraz naszkicować tor cząstki (tj. wykres $y(x)$). Wyznaczyć wektor prędkości. Dla jakiego t wektor prędkości jest prostopadły do wektora położenia?

2-29. Wyobraźmy sobie, że Ziemia obraca się wokół własnej osi z taką prędkością kątową, że człowiek stojący na równiku nic nie waży. Z jaką prędkością kątową i liniową porusza się ten osobnik? Jak długo trwa w tych warunkach doba?

2-30. Młody Dawid, który pokonał Goliata, ćwicząc posługiwanie się procą zauważył, że procy o długości 0,6 m jest w stanie nadać 8 obrotów/s, natomiast procy o długości 0,9 m może maksymalnie nadać 6 obrotów/s. W którym z przypadków kamień uzyskuje większą prędkość? Ile wynosi wówczas przyspieszenie dośrodkowe?

2-31. Cząstka porusza się ze stałą prędkością 30 m/s po okręgu. Okres obiegu jest równy 1,2 s. Ile wynosi przyspieszenie dośrodkowe?

2-32. Pojazd kosmiczny porusza się po orbicie wokół Księżyca blisko jego powierzchni. Przyspieszenie dośrodkowe pochodzące od siły ciężenia wynosi 1,6 m/s². Wyznaczyć: (a) prędkość pojazdu; (b) okres obiegu tej orbity. Promień Księżyca $R = 1,7 \cdot 10^6$ m; wysokość orbity jest zanedbywalnie mała w porównaniu z R .

2-33. Del Piero stojący na skale w kształcie półkuli o promieniu R kopie poziomo piłkę, która rozpoczyna ruch z prędkością początkową v_0 . Jaka wartość prędkości początkowej zapewnia, że piłka nie uderzy w skałę? W jakiej odległości od skały upadnie wtedy piłka? Wskazówka: Zauważyć, że w każdym punkcie (x, y) toru piłki warunek zadania jest spełniony, o ile zachodzi nierówność $x^2 + y^2 > R^2$.

3. Dynamika

3-1. Zbadać zależność drogi hamowania samochodu od jego prędkości v_0 . Założyć różne czasy t_r reakcji kierowcy; przyjąć, że czas ten mieści się w przedziale od 0,2s do 1s. Opóźnienie a samochodu zależy od stanu nawierzchni i opon; założyć, że wartości a leżą w przedziale od 4 m/s^2 do 8 m/s^2 . Sporządzić wykresy. Czy wyniki zależą od masy samochodu?

3-2. Siła zależna od czasu $\mathbf{F} = 8\mathbf{i} - 4t\mathbf{j}$ (w jednostkach SI) działa na ciało o masie $m = 2 \text{ kg}$, które początkowo spoczywało. **(a)** Wyznaczyć chwilę t_1 , w której prędkość ciała będzie wynosiła 15 m/s . **(b)** Jak daleko od punktu początkowego znajduje się ciało w chwili t_1 ? **(c)** Jaki jest wówczas wektor przesunięcia tego ciała?

3-3. Na ciało o masie m działa zależna od położenia siła $\mathbf{F}(x, y, z) = (-kx, 0, 0)$. Wyznaczyć zależności $x(t)$ i $v_x(t)$ przy następujących warunkach początkowych: **(a)** $x(0) = A$, $v_x(0) = 0$; **(b)** $x(0) = 0$, $v_x(0) = v_0$.

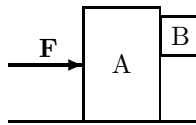
3-4. Z wysokości H spada swobodnie kulka o gęstości: **(a)** równej gęstości wody; **(b)** większej; **(c)** mniejszej. Kulka wpada następnie do wody, gdzie działa na nią siła oporu $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$. Jak zależy od czasu prędkość kulki w wodzie podczas jej ruchu?

3-5. Spadochroniarz wyskakuje z samolotu na dużej wysokości, zwlekając z otwarciem spadochronu. W powietrzu działa na niego zależna od prędkości siła oporu $\mathbf{F} = -kv^2\hat{\mathbf{v}}$. Jaka jest graniczna prędkość spadochroniarza (po dostatecznie długim czasie)?

3-6. Na ciało o masie $m = 3,5 \text{ kg}$ działa zależna od czasu siła pozioma o wartości $F = 8,6 \text{ N} + 2,5 \text{ N/s}^3 \cdot t^3$. Ile wynosi przesunięcie poziome ciała po upływie 3,0s, jeśli ciało początkowo spoczywało?

3-7. Piłkę o masie m upuszczono swobodnie z wieżowca o wysokości H . W trakcie ruchu działa na nią stała siła pozioma o wartości F . Pokazać, że piłka porusza się po linii prostej.

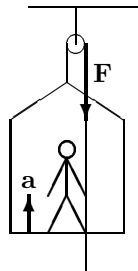
3-8. Jaką siłą należy działać na ciało A, aby ciało B nie poruszało się względem niego (patrz rysunek)? Współczynnik tarcia pomiędzy A i B wynosi 0,55.



3-9. Blok porusza się w górę równi pochyłej o kącie $\varphi = 45^\circ$ ze stałą prędkością pod działaniem siły $F = 15 \text{ N}$ równoległej do równi. Wyznaczyć: **(a)** ciężar bloku; **(b)** minimalną wartość siły powodującej ruch bloku w dół równi, jeśli współczynnik tarcia kinematycznego μ_k wynosi 0,30.

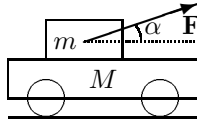
3-10. Wózek o ciężarze W popchnięto siłą \mathbf{F} skierowaną pod kątem φ do poziomu. Pokazać, że minimalna wartość siły niezbędnej do wprawienia w ruch wózka wynosi $F_{\min} = \mu_s W / [\cos \varphi (1 - \mu_s \tan \varphi)]$, gdzie μ_s jest znanym współczynnikiem tarcia statycznego.

3-11. Chłopiec o wadze 320 N siedzący na krzeselku bosmańskim ważącym 160 N ciągnie za linę (patrz rysunek) z siłą $F = 250 \text{ N}$. Pokazać, że przyspieszenie ruchu chłopca do góry jest równe $a = 0,408 \text{ m/s}^2$. Ile wynosi nacisk chłopca na krzesło?



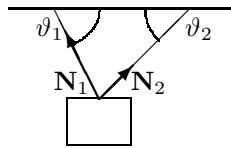
3-12. Masy m_1 , m_2 i m_3 są połączone nicią w ten sposób, że m_1 i m_2 leżą na stole, a masa m_3 zwisa pionowo na nici przewieszanej przez nieważki krążek zamocowany na krawędzi stołu. Współczynniki tarcia ciał 1 i 2 wynoszą odpowiednio f_1 i f_2 . Wyznaczyć przyspieszenie, z jakim poruszają się ciała, oraz naciągi nici. Przy jakich warunkach (dotyczących współczynników tarcia i mas) ruch będzie się odbywał: **(a)** ze stałą prędkością; **(b)** ze stałym przyspieszeniem?

3-13. Na wózku o masie M leży ciężarek o masie m , który jest ciągnięty siłą F skierowaną pod kątem α do poziomu (patrz rysunek). Jaka maksymalna wartość może mieć ta siła, aby ciężarek nie ślizgał się wzdłuż wózka? Z jakim przyspieszeniem będzie się wówczas poruszał wózek? Współczynnik tarcia między wózkiem i ciężarkiem wynosi μ .

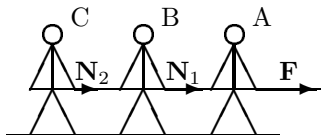


3-14. Ciało zsuwa się po równi pochyłej o kącie nachylenia α . Zależność przebytej drogi od czasu ma postać $s = ct^2$, przy czym $c > 0$. Wyznaczyć współczynnik tarcia pomiędzy ciałem i równią.

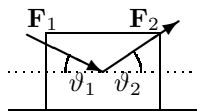
3-15. Walizka wisi na dwóch sznurach, jak to pokazuje rysunek. Pokazać, że naciąg lewego sznura $N_1 = W \cos \vartheta_2 / \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)$, gdzie W jest ciężarem walizki, a kąty ϑ_1 i ϑ_2 są znane.



3-16. Trzej łyżwiarze: A, B i C, o masach $m_A = 30 \text{ kg}$, $m_B = 50 \text{ kg}$ i $m_C = 20 \text{ kg}$, trzymają się liny ciągniętej z siłą $F = 200 \text{ N}$ i ślizgają się po powierzchni o współczynniku tarcia $\mu = 0,1$ (patrz rysunek). Znaleźć przyspieszenie a łyżwiarzy oraz siły N_1 i N_2 naciągu liny.



3-17. Na blok o masie $3,6 \text{ kg}$ umieszczony na poziomej powierzchni o współczynniku tarcia $\mu_k = 0,3$ działają dwie siły jak na rysunku. Z jakim przyspieszeniem porusza się blok? Dane: $F_1 = 20 \text{ N}$, $F_2 = 12 \text{ N}$, $\vartheta_1 = 18^\circ$ i $\vartheta_2 = 27^\circ$.



4. Nieinercjalne układy odniesienia

4-1. Samochód porusza się po łuku o promieniu R . Nawierzchnia drogi nachylona jest pod kątem ϑ do poziomu (w kierunku do wnętrza łuku). Współczynnik tarcia wynosi μ . Pokazać, że maksymalna szybkość, przy której samochód nie wypadnie z drogi na skutek poślizgu, dana jest wzorem $v_{\max} = \sqrt{Rg(\mu + \operatorname{tg} \vartheta)/(1 - \mu \operatorname{tg} \vartheta)}$. Przyjąć, że $\mu \operatorname{tg} \vartheta < 1$.

4-2. Samochód porusza się ze stałą prędkością v po wzniesieniu, którego promień krzywizny w najwyższym punkcie wynosi 20 m. Wyznaczyć v , jeśli na szczycie wzniesienia nacisk kół samochodu na podłoże jest praktycznie równy zeru (pojazd nie odrywa się od nawierzchni szosy).

4-3. Wiadro z wodą wprowadzono w ruch po okręgu o promieniu $R = 1$ m, którego płaszczyzna jest pionowa. Jaka jest minimalna prędkość wiadra w najwyższym punkcie toru, przy której woda nie wyleje się?

4-4. Dziecko o masie $M = 40$ kg buja się na huśtawce zawieszony na dwóch linkach o długości 3 m każda. W najniższym punkcie toru siła naprężenia każdej z linek wynosi $N = 350$ N. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie dośrodkowe dziecka oraz siłę nacisku dziecka na deskę huśtawki w najniższym punkcie toru.

4-5. Prędkość v wagonika kolejki w lunaparku w najwyższym punkcie pionowego toru w kształcie okręgu wynosi 13,0 m/s, a przyspieszenie dośrodkowe $a_d = 2g$. Obliczyć promień toru kolejki.

4-6. Do sufitu wagonu poruszającego się po poziomym torze z przyspieszeniem $a = 3$ m/s² podwieszono na nici ciało o masie $m = 0,5$ kg. Wyznaczyć kąt odchylenia nici od pionu i jej naprężenie.

4-7. Największy i najmniejszy ciężar człowieka stojącego na wadze umieszczonej w windzie wynosi odpowiednio 591 N i 391 N. Zakładając, że przyspieszenie podczas ruszania i hamowania windy jest takie samo, wyznaczyć: **(a)** ciężar rzeczywisty człowieka i jego masę; **(b)** przyspieszenie windy.

4-8. Przy bocznej ścianie pomieszczenia w kształcie cylindra o pionowej osi i promieniu R stoi człowiek. Współczynnik tarcia między człowiekiem a ścianą wynosi μ . Pokazać, że maksymalna wartość okresu T obrotu pomieszczenia wokół osi, przy której człowiek nie będzie zsuwał się po ścianie (jeśli usuniemy podłogę), wynosi $T = \sqrt{4\pi^2 R \mu / g}$. Obliczenia przeprowadzić dla $R = 4$ m i $\mu = 0,40$. Ile obrotów wykona wtedy pomieszczenie w ciągu jednej minuty?

4-9. Określić kierunek oraz obliczyć wartość odchylenia y ciała spadającego z wieży o wysokości H w polu grawitacyjnym Ziemi. Wynik przedyskutować w zależności od szerokości geograficznej φ miejscowości, na której znajduje się wieża (uwzględnić obie półkule). Wskazówka: Założyć, że kąt odchylenia kierunku prędkości od pionu jest bardzo mały.

4-10. Oszacować odchylenie od kierunku północ-południe toru pocisku, którego średnia prędkość podczas lotu wynosi $v_0 = 400$ m/s, czas lotu 1 s, a szerokość geograficzna miejsca strzału $\varphi = 60^\circ$, w przypadku, gdy pocisk wystrzelono w kierunku południkowym. Wskazówka: Założyć, że wartość siły Coriolisa jest stała w trakcie ruchu.

4-11. Pokazać, że okres obrotu płaszczyzny drgań wahadła Foucaulta na szerokości geograficznej φ wynosi $T = 2\pi/(\Omega \sin \varphi)$. W jaki sposób obraca się ta płaszczyzna na półkuli północnej i południowej? Wskazówka: Rozłożyć wektor prędkości kątowej Ziemi Ω na składowe: poziomą i pionową.

5. Praca i energia

5-1. Pozioma siła $F = 150\text{ N}$ działa na ciało o masie $m = 40,0\text{ kg}$ i przesuwa je na odległość $s = 6,00\text{ m}$ po chropowatej powierzchni. Przyjmując, że ciało przesuwało się ze stałą prędkością, obliczyć: **(a)** pracę siły F ; **(b)** energię straconą na pokonanie siły tarcia; **(c)** współczynnik tarcia.

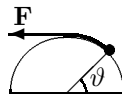
5-2. Blok o masie $m = 15\text{ kg}$ jest przesuwany po poziomej chropowatej powierzchni pod działaniem stałej siły $F = 70\text{ N}$ skierowanej pod kątem 20° do poziomu. Blok przesunięty został o $s = 5,00\text{ m}$, a współczynnik tarcia kinematycznego $\mu_k = 0,30$. Obliczyć pracę: **(a)** siły F ; **(b)** składowej pionowej wypadkowej siły działającej na blok; **(c)** siły grawitacji. Jaka ilość energii została stracona na pokonanie siły tarcia?

5-3. Łuczniczka naciąga łuk w ten sposób, że cięciwa zostaje odciągnięta na odległość $d = 0,40\text{ m}$ pod działaniem siły narastającej od zera do 240 N . Ile wynosi efektywny współczynnik sprężystości cięciwy łuku? Jaką pracę wykonał łuczniczka podczas naciągania cięciwy?

5-4. Przy rozciąganiu sprężyny o 10 cm wykonano pracę $W_1 = 4,00\text{ J}$. Obliczyć pracę potrzebną do rozciągnięcia sprężyny do 20 cm .

5-5. W lufie strzelby o długości $l = 0,60\text{ m}$ działa na kulę o masie $m = 100\text{ g}$ zależna od położenia siła $F(x) = (15000 + 10000x - 25000x^2)\text{ [N]}$ (x w metrach). Obliczyć pracę wykonaną przez gazy prochowe nad kulą w trakcie jej ruchu w lufie. Ile wynosi energia kinetyczna kuli opuszczającej lufę?

5-6. Małe ciało o masie m jest ciągnięte w górę za pomocą nici i porusza się po powierzchni cylindra o promieniu R . Ruch odbywa się ze stałą prędkością. Pokazać, że wartość naciągu nitki wynosi $F = mg \cos \vartheta$ (patrz rysunek). Wyznaczyć pracę siły F pomiędzy $\vartheta_p = 0$ i $\vartheta_k = \pi/2$.



5-7. Blok o masie $m = 0,60\text{ kg}$ ześlizguje się z idealnie gładkiej równi pochyłej o długości 6 m i kącie nachylenia 20° , a następnie zaczyna się poruszać po poziomej płaszczyźnie, gdzie współczynnik tarcia $\mu_k = 0,50$. Ile wynosi prędkość bloku na końcu równi oraz po przebyciu 1 metra na poziomej powierzchni? Jaką odległość przebędzie blok po poziomej płaszczyźnie do chwili zatrzymania się?

5-8. Zależna od czasu siła działając na ciało o masie $m = 4\text{ kg}$ powoduje jego przesunięcie o $x = 2t - 3t^2 + t^3\text{ [m]}$ (t w sekundach). Wyznaczyć pracę siły zewnętrznej w ciągu pierwszych trzech sekund.

5-9. Samochód o masie $m = 1500\text{ kg}$ przyspiesza jednostajnie od stanu spoczynku do prędkości $v_3 = 10\text{ m/s}$ w czasie $t_3 = 3\text{ s}$. Obliczyć: **(a)** Pracę wykonaną nad samochodem; **(b)** Średnią moc silnika w pierwszych trzech sekundach ruchu; **(c)** Moc chwilową dla $t_2 = 2\text{ s}$.

5-10. Ciało o masie $m = 0,4\text{ kg}$ ślizga się po poziomym torze w kształcie koła o promieniu $R = 1,5\text{ m}$. Jego prędkość początkowa wynosi $v_0 = 8\text{ m/s}$. Po jednym pełnym obrocie jego prędkość, wskutek działania tarcia, zmniejszyła się do $v_1 = 6\text{ m/s}$. Wyznaczyć stratę energii na pracę nad siłami tarcia. Obliczyć współczynnik tarcia kinetycznego. Ile obrotów wykona to ciało zanim się zatrzyma?

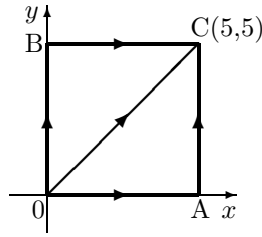
5-11. Pocisk o masie $m = 5\text{ g}$ i prędkości $v = 600\text{ m/s}$ wbił się w drewno na głębokość $d = 4\text{ cm}$. Korzystając z twierdzenia o pracy i energii, wyznaczyć średnią wartość siły oporu działającej na pocisk. Zakładając, że siła oporu jest stała, obliczyć czas hamowania pocisku w drewnie.

5-12. Spadochroniarz o masie $m = 50\text{ kg}$ wyskoczył z samolotu na wysokości 1000 m i wylądował z prędkością $v = 5\text{ m/s}$. Jaka ilość energii została zużyta na pokonanie sił oporu powietrza?

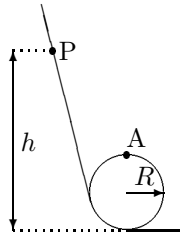
5-13. Siła zachowawcza \mathbf{F} zależy od tylko współrzędnej x : $\mathbf{F} = (-Ax + Bx^2)\mathbf{i}\text{ [N]}$, gdzie A i B — stałe, a x w metrach. Wyznaczyć $U(x)$, jeśli $U(0) = 0$.

5-14. Korzystając ze wzoru na pracę $W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ pokazać, że dowolna stała siła jest zachowawcza. Obliczyć pracę sił: **(a)** $\mathbf{F} = (3\mathbf{i} + 4\mathbf{j})\text{ [N]}$; **(b)** $\mathbf{F} = (3y + x^2)\mathbf{j}\text{ [N]}$ na drodze: (1) OAC,

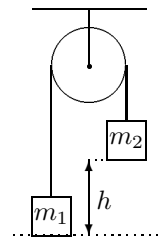
(2) OBC, (3) OC (patrz rysunek). Która z nich jest zachowawcza?



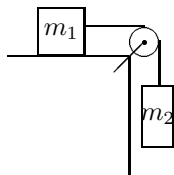
5-15. Paciorek P ślizga się bez tarcia po pętli z drutu (patrz rysunek). Jeśli wysokość początkowa wynosi $h = 3,5R$, to jaką ma on prędkość w punkcie A? Ile wynosi nacisk paciorka na drut w tym punkcie?



5-16. Dwie masy są połączone nicią przewieszoną przez krążek, jak na rysunku. Stosując zasadę zachowania energii wyznaczyć prędkość masy m_1 w momencie, gdy masa m_2 osiągnie poziomą płaszczyznę. Masę krążka i nici pominąć.



5-17. Współczynnik tarcia między masą $m_1 = 3\text{ kg}$ a podłożem wynosi 0,4. Układ rozpoczyna ruch od stanu spoczynku (patrz rysunek). Ile wynosi prędkość masy $m_2 = 5\text{ kg}$ po przebyciu przez nią odległości $h = 1,5\text{ m}$? Masę krążka i nici zaniedbać.



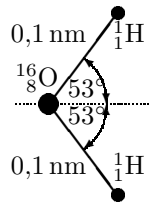
5-18. Energia potencjalna siły $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ ma postać $U(x, y) = 3x^3y - 7x$. Obliczyć \mathbf{F} dla dowolnego (x, y) .

5-19. Pokazać, że następujące siły są zachowawcze: (a) $F_x(x) = Ax + Bx^2$; (b) $F_x(x) = Ae^{\alpha x}$, gdzie A, B, α są stałymi. Wyznaczyć zmianę energii potencjalnej pomiędzy $x_p = 0$ oraz $x_k = x > 0$.

6. Zasada zachowania pędu

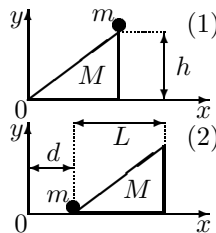
6-1. Kula bilardowa o masie $m = 0,10 \text{ kg}$ i prędkości $v_0 = 10 \text{ m/s}$ uderza w bok stołu i odbija się pod kątem 60° . Wyznaczyć wartość średniej siły, z jaką bila działała na stół w trakcie zderzenia trwającego $0,20 \text{ s}$.

6-2. Wyznaczyć położenie środka masy przedstawionej na rysunku cząsteczki wody.



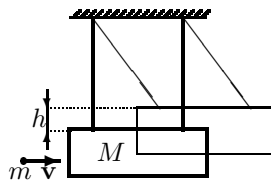
6-3. Blondynka o masie $m_b = 45 \text{ kg}$ stoi na desce surfingowej o masie $m = 150 \text{ kg}$ i długości 3 m , spoczywającej na powierzchni wody. Dziewczyna rozpoczyna spacer po desce z prędkością $u = 1 \text{ m/s}$ względem deski. Z jaką prędkością porusza się względem wody dziewczyna, a z jaką deska? Jak daleko przesunie się względem wody dziewczyna, jeśli przejdzie z jednego końca deski na drugi? Jak daleko przesunie się w tym czasie deska?

6-4. Ciało o masie $m = 2 \text{ kg}$ znajduje się początkowo na wierzchołku równi pochyłej w kształcie jednorodnego klina o masie $M = 8 \text{ kg}$, wysokości $h = 2 \text{ m}$ i długości $L = 6 \text{ m}$, mogącego przesuwać się po poziomej płaszczyźnie (patrz rysunek). Zakładając, że tarcie nie występuje, wyznaczyć położenie równi w momencie, gdy ciało zsunie się (osiągnie płaszczyznę poziomą). Wskazówka: współrzędna x środka masy nie zmienia się.



6-5. Ciało o masie $m = 6 \text{ kg}$ spada swobodnie na Ziemię z wysokości $h = 10 \text{ m}$. Z jaką prędkością względem inercjalnego układu odniesienia porusza się Ziemia w momencie upadku ciała? Masa Ziemi $M = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

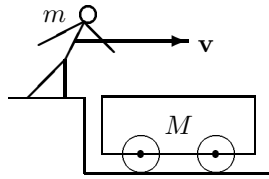
6-6. W zawieszony na dwóch niciach wahadło balistyczne o masie $M = 1,00 \text{ kg}$ (patrz rysunek) wbija się pocisk o masie $m = 5,00 \text{ g}$ (zderzenie jest idealnie niesprężyste). Wahadło wraz z pociskiem podnosi się na wysokość $h = 5,00 \text{ cm}$. Wyznaczyć prędkość pocisku v_0 oraz ilość ciepła, jakie wydzielilo się podczas zderzenia.



6-7. Neutron zderza się czołowo i idealnie sprężysto ze spoczywającym początkowo jądrem atomu węgla $^{12}_6\text{C}$. Jaką część początkowej energii kinetycznej neutronu jest przekazywana atomowi węgla? Wyznaczyć energię kinetyczną jądra węgla i neutronu po zderzeniu, jeśli początkowa energia kinetyczna neutronu wynosiła $1,60 \cdot 10^{-23} \text{ J}$. Masa jądra atomu węgla jest 12-krotnie większa od masy neutronu.

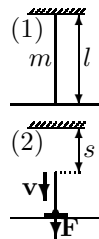
6-8. Człowiek o masie $m = 60 \text{ kg}$ biegnący z prędkością początkową $v_0 = 4 \text{ m/s}$ skacze na stojący wózek o masie $M = 120 \text{ kg}$ (patrz rysunek). Człowiek początkowo ślizga się po powierzchni wózka, po czym zatrzymuje się względem niego. Współczynnik tarcia między człowiekiem i wózkiem wynosi $0,4$, a wózek porusza się po poziomej płaszczyźnie bez tarcia. **(a)** Wyznaczyć końcową prędkość człowieka i wózka. **(b)** Obliczyć siłę tarcia działającą na człowieka w trakcie

poślizgu. Jak długo trwał poślizg? (c) Wyznaczyć zmianę pędu człowieka oraz wózka. (d) Jak daleko względem wózka przemieści się człowiek podczas poślizgu? (e) Jaką odległość przebędzie w tym czasie wózek? (f) Obliczyć zmianę energii kinetycznej człowieka i wózka. Dlaczego wyniki są różne?



6-9. Kula bilardowa poruszająca się z prędkością $v_1 = 5,00$ m/s zderza się niecentralnie z drugą identyczną kulą. Po zderzeniu pierwsza kula porusza się z prędkością $u_1 = 4,33$ m/s pod kątem 30° względem początkowego kierunku ruchu. Zakładając, że zderzenie jest idealnie sprężyste, wyznaczyć prędkość drugiej kuli.

6-10. Łańcuch o długości l i masie m zwisa pionowo nad stołem, dotykając go jednym końcem (jak na rysunku). W pewnej chwili górny koniec zostaje zwolniony i łańcuch zaczyna spadać. Znaleźć zależność siły F działającej na stół od drogi s przebytej przez górny koniec łańcucha i pokazać, że jej maksymalna wartość wynosi $3mg$.



6-11. Silniki pierwszego stopnia rakiety Saturn V paliwo zużywają w tempie $1,5 \cdot 10^4$ kg/s, a powstające spaliny wyrzucane są z prędkością $u = 2,6 \cdot 10^3$ m/s. Obliczyć siłę ciągu silników tej rakiety (siła ciągu silnika $F_c = u dM/dt$). Obliczyć przyspieszenie rakiety w momencie startu, jeśli jej początkowa masa wynosi $3,0 \cdot 10^6$ kg (należy uwzględnić siłę grawitacji).

6-12. Odległości do najbliższych gwiazd wynoszą około 4 lat świetlnych. Gdybyśmy chcieli wysłać do jednej z nich sondę kosmiczną, która miałaby nam przekazać wyniki badań po „rozsądnym” czasie oczekiwania (kilkadziesiąt lat), musielibyśmy nadać jej prędkość rzędu $0,1c = 3 \cdot 10^7$ m/s. Jaką część początkowej masy pojazdu musiałoby stanowić paliwo, gdyby posługiwać się konwencjonalnym napędem wykorzystującym chemiczne spalanie (patrz zadanie poprzednie)? Jak zmieniłaby się sytuacja, gdyby udało się uzyskać $u \sim 10^7$ m/s (np. za pomocą jakiegoś rodzaju paliwa jądrowego)?

6-13. Na szynach stoi wagon-cysterna z wodą. W dnie cysterny zamontowano w odległości l od jednego z jej końców pionową rurkę zakończoną kranem. Czy i w którą stronę zaczniesz poruszać wagon, jeśli otworzymy kran? Tarcie zaniedbać.

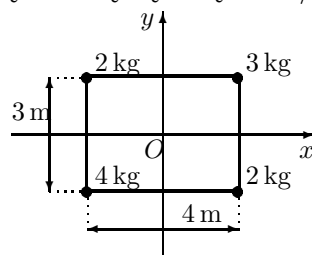
7. Dynamika bryły sztywnej. Zasada zachowania momentu pędu

7-1. Silnik elektryczny został wyłączony w chwili, gdy jego wirnik wykonywał 100 obrotów na minutę. Zakładając, że opóźnienie kątowe wirnika wynosi 2 rad/s^2 , obliczyć: **(a)** czas, po którym wirnik zatrzyma się; **(b)** kąt, o jaki obróci się wirnik do chwili zatrzymania.

7-2. Zależność drogi kątowej Θ pewnego punktu leżącego na kole od czasu jest dana wzorem $\Theta(t) = 5 + 10t + 2t^2$ [rad] (t w sekundach). Określić położenie kątowe, prędkość kątową oraz przyspieszenie kątowe tego punktu dla $t_0 = 0$ i $t_1 = 3 \text{ s}$.

7-3. Tarcza o promieniu $R = 8 \text{ cm}$ obraca się ze stałą prędkością kątową 1200 obr/min wokół osi centralnej. Określić: **(a)** jej prędkość kątową w rad/s ; **(b)** prędkość liniową punktów odległych od osi o 3 cm ; **(c)** przyspieszenie dośrodkowe punktów na obwodzie.

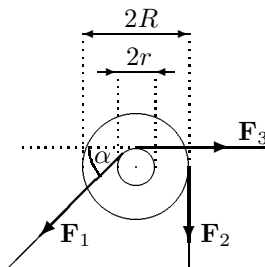
7-4. Cztery masy są połączone ze sobą sztywnymi prętami o pomijalnej masie (patrz rysunek). Obliczyć moment bezwładności układu względem osi OZ (prostopadłej do płaszczyzny XOY i przechodzącej przez punkt O). Wyznaczyć energię kinetyczną ruchu obrotowego, jeśli układ obraca się wokół osi OZ ze stałą prędkością kątową 6 rad/s .



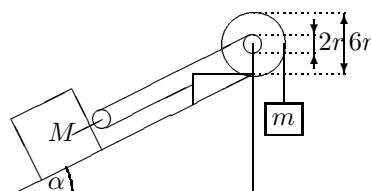
7-5. Dwie masy: M i m są połączone prętem o długości L i znikomo małej masie. Pokazać, że moment bezwładności względem osi prostopadłej do pręta jest najmniejszy dla osi przechodzącej przez środek masy układu.

7-6. Wyznaczyć moment bezwładności następujących brył jednorodnych: **(a)** wydrążonego walca o masie m i promieniach: zewnętrznym R i wewnętrznym $r < R$ względem osi przechodzącej przez środek masy i równoległej do ścian bocznych; **(b)** kuli o promieniu R i masie M względem osi przechodzącej przez jej środek; **(c)** tej samej kuli — względem osi stycznej do jej powierzchni; **(d)** tarczy o promieniu r i masie m względem osi przechodzącej przez jej środek i prostopadłej do płaszczyzny tarczy; **(e)** tarczy względem osi przechodzącej przez punkt na jej brzegu i prostopadłej do płaszczyzny tarczy.

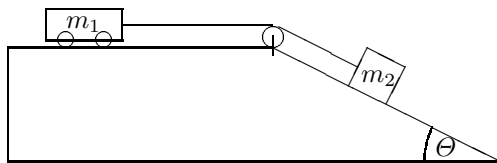
7-7. Wyznaczyć wartość wypadkowego momentu sił τ działającego na podwójną szpulkę względem jej osi (patrz rysunek), jeśli $r = 10 \text{ cm}$, $R = 25 \text{ cm}$, nitki są ciągnięte z siłami $F_1 = 12 \text{ N}$, $F_2 = 9 \text{ N}$, $F_3 = 10 \text{ N}$, a kąt $\alpha = 45^\circ$.



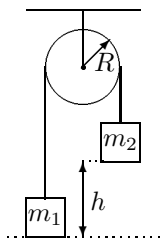
7-8. Obliczyć masę m ciężarka, jaki należy zawiesić, aby przedstawiony na rysunku układ pozostawał w równowadze, jeśli $M = 150 \text{ kg}$ i $\alpha = 30^\circ$.



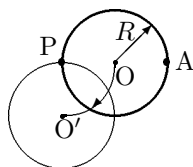
7-9. W układzie przedstawionym na rysunku $m_1 = 2 \text{ kg}$, $m_2 = 6 \text{ kg}$, promień krążka $R = 0,25 \text{ m}$, jego masa $m_k = 10 \text{ kg}$, kąt $\Theta = 30^\circ$, współczynnik tarcia kinetycznego dla masy m_2 na równi $\mu = 0,30$. Zanedbując masę sznurka, wyznaczyć przyspieszenie mas m_1 i m_2 oraz naciągi nici. Czy naciągi są takie same?



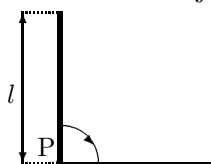
7-10. W układzie przedstawionym na rysunku $m_1 = 15 \text{ kg}$, $m_2 = 19 \text{ kg}$, promień krążka $R = 0,1 \text{ m}$, jego masa $m_k = 3 \text{ kg}$, a $h = 3 \text{ m}$. Zanedbując masę sznurka i tarcie, wyznaczyć przyspieszenie i prędkość mas m_1 i m_2 oraz naciągi nici (czy są takie same?) w momencie, gdy obie masy mijają się. Wskazówka: Wykorzystać zasadę zachowania energii mechanicznej.



7-11. Jednorodna tarcza o promieniu R i masie M może się obracać wokół punktu P (patrz rysunek). Obliczyć prędkość środka masy tarczy w najniższym punkcie toru. Wyznaczyć prędkość punktu A w najniższym punkcie toru ruchu. Wskazówka: Wykorzystać zasadę zachowania energii mechanicznej. Powtórzyć obliczenia, zastępując tarczę obręczą.



7-12. Jednorodny pręt o długości L i masie M może się obracać wokół osi P. Jego położenie początkowe jest pionowe. Obliczyć: **(a)** jego prędkość kątową i przyspieszenie kątowe; **(b)** składowe: poziomą i pionową przyspieszenia całkowitego środka masy pręta; **(c)** składowe siły, z jaką pręt działa na punkt P w chwili, gdy znajduje się w położeniu poziomym. Wskazówka: Wykorzystać zasadę zachowania energii mechanicznej.

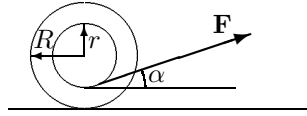


7-13. Dziecko o masie $m = 40 \text{ kg}$ stoi na zewnątrz kołowej karuzeli o masie $M = 80 \text{ kg}$ i promieniu $R = 2 \text{ m}$ obracającej się z prędkością kątową $\Omega = 2 \text{ rad/s}$. Dziecko wchodzi na karuzelę. **(a)** Czy zmieni się jej prędkość kątowa? Jeśli tak, to jaka jest jej nowa wartość? **(b)** Dziecko rozpoczyna wędrówkę do środka karuzeli. Ile wynosi jej prędkość kątowa w chwili, gdy dziecko znajduje się na środku? **(c)** Jak zmieni się energia kinetyczna układu, gdy dziecko przejdzie od brzegu do środka karuzeli?

7-14. Jednorodny walec (kula) o promieniu r i masie m stacza się bez poślizgu po równi pochyłej o kącie nachylenia β . Obliczyć przyspieszenie a środka masy walca (kuli) oraz prędkość v , jaką ma on po przebyciu drogi s wzdłuż równi, jeżeli w chwili $t = 0$ ciało spoczywało.

7-15. Na wierzchołku równi pochyłej spoczywają: kula, sfera, walec, rurka, tarcza i obręcz. W jakiej kolejności stoczą się te obiekty z równi, jeśli ich masy i promienie są takie same?

7-16. Na poziomym stole leży szpulka nici. Z jakim przyspieszeniem liniowym a będzie się poruszać oś szpulki, jeśli ciągnąć ją siłą \mathbf{F} (patrz rysunek)? Pod jakim kątem należy ciągnąć nić, by szpulka poruszała się w prawo? Szpulka toczy się po powierzchni stołu bez poślizgu. Moment bezwładności szpulki o masie m względem jej środka wynosi I .



7-17. W zawieszony u sufitu jednorodny pręt o masie m i długości l uderza idealnie niesprężysto ciało o masie M lecące z prędkością v_0 prostopadłe do osi pręta. Określić prędkość kątową układu pręt + ciało tuż po zderzeniu, jeżeli ciało uderzyło w odległości $l/3$ od punktu zawieszenia pręta. Jaka ilość ciepła wydzieliła się w trakcie zderzenia? O jaki kąt α odchyli się od pionu pręt?

7-18. Drewniana listwa o długości $l = 0,4\text{ m}$ i masie $m = 1\text{ kg}$ może się obracać dookoła osi prostopadłej do niej i przechodzącej przez jej środek. W koniec listwy trafia pocisk o masie $m_1 = 0,01\text{ kg}$, lecący z prędkością $v_1 = 200\text{ m/s}$ w kierunku prostopadłym do osi i do listwy. Znaleźć prędkość kątową, z jaką listwa zacznie się obracać, gdy utkwi w niej pocisk.

7-19. Poziomy stolik o masie $M = 20\text{ kg}$ i promieniu 1 m wiruje z prędkością $\Omega_0 = 20\text{ obr/min}$. W środku stolika stoi człowiek i trzyma w wyciągniętych rękach hantle. Jaka będzie prędkość kątowna Ω_k układu, jeśli człowiek opuściwszy ręce zmniejszy swój moment bezwładności od $I_0 = 3\text{ kg} \cdot \text{m}^2$ do $I_k = 1\text{ kg} \cdot \text{m}^2$? Jak zmieni się przy tym energia kinetyczna układu?

8. Pole grawitacyjne. Statyka

8-1. Oszacować, jakie promienie powinny mieć Ziemia i Słońce, aby stały się czarnymi dziurami. Ile wynosiłyby wówczas ich gęstości? Ile ważyłyby umieszczone na ich powierzchniach blondynki o masie $m = 55 \text{ kg}$ każda?

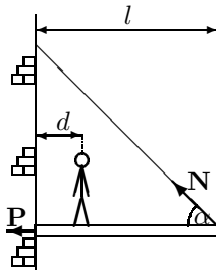
8-2. Okres obrotu Słońca wokół własnej osi wynosi obecnie $T = 27$ dni. Po czasie potrzebnym na spalenie się paliwa jądrowego ($\sim 5 \cdot 10^9$ lat) Słońce zacznie się kurczyć w procesie grawitacyjnego kolapsu. Oszacować promień Słońca R_x , przy którym zacznie się ono rozpadać. Masa Słońca $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, promień $R_S = 7 \cdot 10^8 \text{ m}$.

8-3. Korzystając z twierdzenia Gaussa, wyznaczyć natężenie i potencjał pola grawitacyjnego: **(a)** wewnątrz i na zewnątrz jednorodnej kuli o masie M i promieniu R . **(b)** wokół jednorodnej nieskończenie długiej struny o liniowej gęstości ρ .

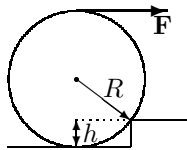
8-4. Trzy jednakowe masy m umieszczone są w wierzchołkach trójkąta równobocznego o boku a . Wyznaczyć natężenie i potencjał pola grawitacyjnego w środku trójkąta i w środku jednego z boków. Jaką pracę trzeba wykonać przeciw siłom grawitacji, aby przesunąć ciało o masie M pomiędzy tymi punktami?

8-5. Ziemia, której masa wynosi $M_Z = 5,96 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, porusza się po elipsie wokół Słońca o masie $M_S = 1,97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Jej najmniejsza i największa odległość od Słońca wynoszą odpowiednio $l_{\min} = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$ i $l_{\max} = 1,51 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Wyznaczyć moment pędu Ziemi oraz jej prędkość w punktach odległych od Słońca o l_{\min} i l_{\max} .

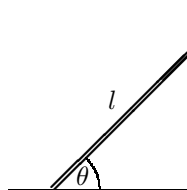
8-6. Jednorodna pozioma platforma zamocowana jest do ściany i podwieszona liną, jak na rysunku. Obliczyć naciąg liny N i siłę P wywieraną przez platformę na ścianę, jeśli w odległości $d = 2 \text{ m}$ od ściany stoi człowiek o ciężarze $W_1 = 600 \text{ N}$. Ciężar platformy $W_2 = 200 \text{ N}$, jej długość $l = 8 \text{ m}$, a kąt $\alpha = 53^\circ$.



8-7. Z jaką minimalną siłą F trzeba ciągnąć za nić, aby wtoczyć szpulkę o promieniu R na próg o wysokości $h < R$ (patrz rysunek)? Jaką siłą P naciska wtedy szpulka na krawędź progu? Założyć, że szpulka nie ślizga się.



8-8. Jednorodna drabina o ciężarze W oparta jest o idealnie gładką pionową ścianę (patrz rysunek). Pod jakim kątem θ można postawić drabinę, aby się nie ślizgała, jeśli współczynnik tarcia między drabiną a podłogą wynosi $\mu = 0,4$?

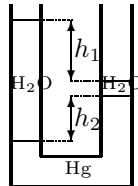


8-9. Jaką maksymalną wysokość może mieć granitowy słup o stałym przekroju, aby nie pękł pod własnym ciężarem? Wytrzymałość granitu na ściskanie wynosi $170 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$, a jego gęstość $2,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

9. Dynamika płynów

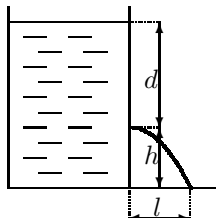
9-1. Basen o wymiarach $30\text{ m} \times 10\text{ m}$ i płaskim dnie jest napełniony wodą do głębokości 2 m . Jakie całkowite siły działają na dno oraz na każdą ze ścian basenu?

9-2. Obustronnie otwarta rurka w kształcie litery U jest częściowo napełniona rtęcią (gęstość $\rho_{\text{Hg}} = 13600\text{ kg/m}^3$), a częściowo wodą, jak na rysunku. Ile wynosi h_2 w stanie równowagi, jeśli $h_1 = 1,00\text{ cm}$?



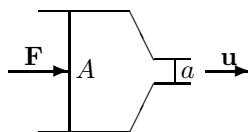
9-3. Jaki ciężar może unieść balon o objętości $V = 400\text{ m}^3$ wypełniony helem? Gęstość helu $\rho_{\text{He}} = 0,180\text{ kg/m}^3$, powietrza $\rho = 1,29\text{ kg/m}^3$.

9-4. Boczna ściana dużego zbiornika z wodą przerdzewiała na wysokości $h = 4\text{ m}$ nad ziemią i $d = 16\text{ m}$ pod poziomem wody. Z powstałej dziury woda wycieka w tempie $2,5\text{ l/min}$. Z jaką prędkością v wypływa strumień wody? Jaki przekrój ma dziura? Jak daleko od ściany zbiornika strumień opada na ziemię?

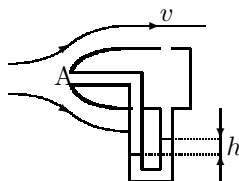


9-5. Pod jakim minimalnym ciśnieniem musi być pompowana woda z rzeki płynącej na wysokości $h_1 = 564\text{ m}$ n.p.m., aby dotarła do wioski położonej na wysokości $h_2 = 2096\text{ m}$ n.p.m.? Jaka jest prędkość wody w rurze, jeśli pompowane jest 4500 m^3 na dobę, a średnica rury wynosi $d = 15\text{ cm}$? Jakie dodatkowe ciśnienie jest potrzebne do zapewnienia tego przepływu? Przyjąć, że ciśnienie atmosferyczne i przyspieszenie ziemskie jest takie samo na obu wysokościach.

9-6. Tłoczek strzykawki o powierzchni A porusza się ze stałą prędkością v pod działaniem siły \mathbf{F} . Z jaką prędkością wylatuje ze strzykawki strumień cieczy o gęstości ρ przez otwór o przekroju a ($a \ll A$)?



9-7. Do pomiaru prędkości przepływu powietrza można użyć rurki Pitota (patrz rysunek), mierząc różnicę między ciśnieniem statycznym i całkowitym. Jaka jest prędkość przepływu powietrza v , jeśli różnica poziomów rtęci (o gęstości $\rho_{\text{Hg}} = 13600\text{ kg/m}^3$) w ramionach U-rurki wynosi $h = 5,00\text{ cm}$? Założyć, że w punkcie A powietrze nie porusza się. Gęstość powietrza $\rho = 1,29\text{ kg/m}^3$.



10. Drgania

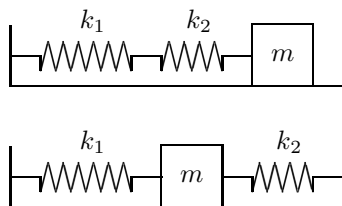
10-1. Wyznaczyć okresy małych drgań: **(a)** tarczy o promieniu R zawieszonyj w punktach odległych od środka masy o R i $R/2$; **(b)** kulki metalowej zawieszonyj na nitce o długości $L = 0,25\text{ m}$ umieszczonyj w cieczy o gęstości trzykrotnie mniejszej od gęstości kulki (opory zaniedbać); **(c)** ciała o masie m zawieszonyj pośrodku poziomej metalowej linki o długości L rozciąganyj siłą N .

10-2. Amplitudy drgań wymuszonyj odbywającyj się pod działaniem dwóch sił zewnętrznyj o częstościach kołowyj $\Omega_1 = 200\text{ s}^{-1}$ i $\Omega_2 = 300\text{ s}^{-1}$ są równe. Wyznaczyć częstość rezonansową Ω_r .

10-3. Przy jakiej prędkości samochód poruszający się po drodze ułożonyj z betonowyj płyt będzie szczególnie silnie drgał w kierunku pionowyj, jeśli długość każdej płyty wynosi L , a nacisk na resor, który ugina się o Δx pod działaniem siły F_x , wynosi N_1 ?

10-4. Blok A o masie M przyczepiony do sprężyny o współczynniku sprężystości k wykonuje ruch harmoniczny prosty, ślizgając się po idealnie gładkiej powierzchni. Blok B o masie m spoczywa na nim. Jaki jest okres drgań? Jaka jest maksymalna amplituda drgań, przy której blok B nie będzie się ślizgał względem bloku A , jeśli współczynnik tarcia statycznyj między nimi wynosi μ ?

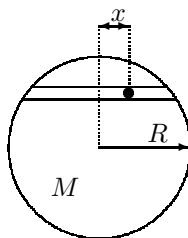
10-5. Masa m jest przyczepiona do dwóch sprężyn o stałych sprężystości k_1 i k_2 (patrz rysunki). W obu przypadkach zostaje ona wychylona z położenia równowagi i puszczonej; porusza się bez tarcia. Pokazać, że wykonuje ona ruch harmoniczny prosty o okresach odpowiednio $T_A = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1k_2}}$ i $T_B = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$.



10-6. (a) Całkowita energia mechaniczna ciała o masie m wykonującyj ruch harmoniczny prosty po idealnie gładkiej poziomej powierzchni pod działaniem siły sprężystości sprężyny o współczynniku k wynosi $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Korzystając z zasady zachowania energii ($dE/dt = 0$), wyprowadzić równanie ruchu harmonicznego.

(b) Małe ciało ślizga się bez tarcia wewnątrz sferycznej powierzchni o promieniu R . Energia mechaniczna ciała wychylonego z położenia równowagi o kąt ϑ wynosi $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos \vartheta)$. Wyprowadzić równanie ruchu. Pokazać, że okres małych drgań jest równy $T = 2\pi\sqrt{R/g}$.

10-7. Rysunek przedstawia tunel wewnątrz jednorodnej planety o masie M i promieniu R . Pokazać, że wynikający z II zasady dynamiki równanie ruchu dla ciała w tunelu ma postać równania oscylatora harmonicznego $d^2x/dt^2 + gx/R = 0$, gdzie g — przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni planety. Oszacować okres oscylacji dla ciała w tunelu we wnętrzu Ziemi.



11. Termodynamika

11-1. Dwa betonowe (współczynnik rozszerzalności liniowej $1,4 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$) przęsła mostu o długości L każde są tak zamontowane, że nie mają miejsca na rozszerzanie się. Na jaką wysokość y wybrzuszy się most, jeśli temperatura wzrośnie o ΔT ? Wykonać obliczenia dla $L = 250 \text{ m}$ oraz $\Delta T = 20^\circ\text{C}$.

11-2. Wahadło zegara jest podwieszona na mosiężnym (współczynnik rozszerzalności liniowej $1,84 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$) pręcie. Zegar chodzi dokładnie w temperaturze 20°C . O ile spóźni się on lub pośpieszy w ciągu tygodnia, jeśli temperatura wzrośnie do 30°C ?

11-3. Słońce można traktować jako ciało o temperaturze 5800 K . Jeśli promień Słońca wynosi $7 \cdot 10^8 \text{ m}$ i $e = 1$, jaka jest jego całkowita moc promieniowania?

11-4. Dwa pręty — z miedzi i z aluminium, o przewodnościach cieplnych odpowiednio 394 i $218 \text{ J}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K})$, długości 50 cm każdy i promieniu 1 cm są połączone jak na rysunku. Ich powierzchnie boczne są izolowane cieplnie. Wolny koniec pręta miedzianego znajduje się w temperaturze 80°C , a aluminiowego — w temperaturze 10°C . **(a)** Jaka jest temperatura na złączu? **(b)** Jaka jest szybkość przepływu ciepła przez pręty?

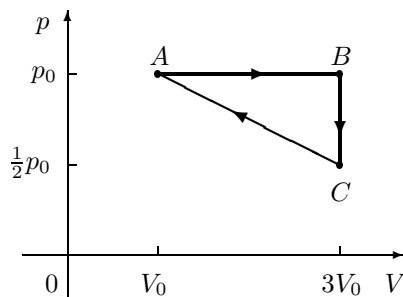


11-5. Ile ciepła potrzeba do przekształcenia 80 g lodu o temperaturze początkowej -10°C w 60 g wody i 20 g pary wodnej o temperaturze 100°C ? Ciepło właściwe lodu wynosi $2095 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, ciepło topnienia $334 \text{ kJ}/\text{kg}$, ciepło właściwe wody $4190 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$, ciepło parowania w temperaturze wrzenia $2258 \text{ kJ}/\text{kg}$.

11-6. W niskich temperaturach molowe ciepło właściwe ciał stałych opisane jest *prawem Debye'a* $C = k(T/T_D)^3$, gdzie $k = 1945 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$, a T_D jest *temperaturą Debye'a* charakterystyczną dla danego ciała stałego. Obliczyć ilość ciepła potrzebną do podniesienia temperatury $2,4 \text{ mol}$ aluminium ($T_D = 400 \text{ K}$) od $T_1 = 10 \text{ K}$ do $T_2 = 20 \text{ K}$.

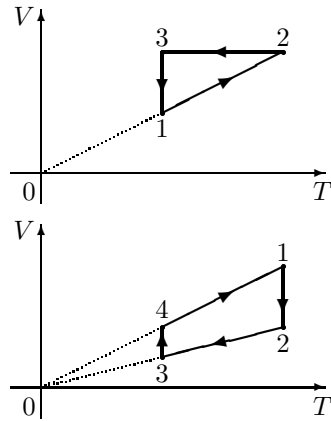
11-7. W naczyniu znajduje się gaz o masie cząsteczkowej μ , temperaturze T i ciśnieniu p . Jaka jest gęstość gazu w tych warunkach? Obliczenia wykonać dla $T = 300 \text{ K}$, $p = 1,04 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ i $M = 32 \text{ kg}/\text{kmol}$. Stała gazowa $R = 8,32 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$.

11-8. Gaz idealny poddany jest przemianie cyklicznej $ABCA$ przedstawionej na wykresie. Przedstawić przemianę we współrzędnych (p, T) oraz (V, T) . Wyrazić przez p_0 i V_0 : **(a)** pracę wykonaną przez gaz na każdym odcinku cyklu; **(b)** całkowitą pracę W wykonaną przez gaz w każdym cyklu; **(c)** ciepło Q pobrane przez gaz w każdym cyklu.



11-9. W dwóch naczyniach o pojemnościach V_1 i V_2 znajdują się masy m_1 i m_2 gazów o masach cząsteczkowych odpowiednio μ_1 i μ_2 . Obliczyć ciśnienie mieszaniny gazów powstałej po połączeniu tych naczyń przewodem o pomijalnej objętości. Temperatura gazów jest stała i wynosi T .

11-10. Przedstawić we współrzędnych (p, V) na tle rodzin izoterm przemiany cykliczne pokazane na rysunkach we współrzędnych (V, T) .



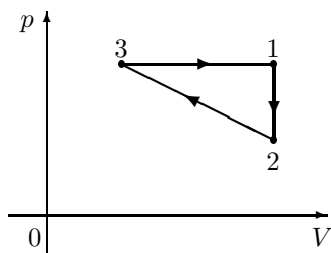
11-11. Udowodnić, że zachodzi relacja $c_p - c_V = R/\mu$.

11-12. Obliczyć pracę wykonaną przy adiabatycznym sprężaniu pewnej masy gazu od objętości V_1 do V_2 , jeżeli ciśnienie początkowe wynosiło p_1 . Dany jest stosunek $\kappa = C_p/C_V$.

11-13. Masa m wodoru rozszerza się izobarycznie, dwukrotnie powiększając objętość. Znaleźć zmianę entropii w tym procesie. Dane są: masa cząsteczkowa wodoru μ i ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu c_p .

11-14. Znaleźć zmianę entropii przy zamianie masy m lodu o temperaturze T_1 w parę o temperaturze T_2 .

11-15. 1 mol gazu doskonałego podlega cyklicznej przemianie przedstawionej na rysunku. Obliczyć ciepło pobrane przez gaz w przemianie $2 \rightarrow 3$ oraz pracę uzyskaną w cyklu, jeśli dane są temperatury: najwyższa T_1 i najniższa $T_2 = T_3$.



11-16. Gaz dwuatomowy wykonuje cykl Carnota, przy czym podczas rozprężania izotermicznego jego objętość wzrasta dwukrotnie, a podczas rozprężania adiabatycznego wykonuje on pracę równą 300 kJ. Znaleźć pracę wykonaną podczas pełnego cyklu.

11-17. Zaproponowano projekt elektrowni, wykorzystującej gradient temperatury w oceanie. Układ miałby pracować pomiędzy 20°C (temperaturą wód powierzchniowych) a 5°C (temperaturą wód na głębokości około 1 km). **(a)** Jaka jest maksymalna sprawność takiego układu? **(b)** Gdyby elektrownia miała mieć moc 75 MW, jaka ilość energii cieplnej byłaby pobierana w ciągu godziny? **(c)** Co czyni ten projekt interesującym, pomimo wyniku otrzymanego w punkcie A?

12. Ruch falowy

12-1. Dwa impulsy falowe $y_1(x, t) = 5/[(3x - 4t)^2 + 2]$ i $y_2(x, t) = -5/[(3x + 4t - 6)^2 + 2]$ biegną wzdłuż tej samej napiętej struny. **(a)** W jakich kierunkach i z jakimi prędkościami poruszają się te impulsy? **(b)** W jakiej chwili czasu impulsy zniosą się na całej prostej? **(c)** W jakich punktach te impulsy znoszą się w dowolnej chwili czasu?

12-2. Kosinusoidalna fala rozchodzi się wzdłuż osi OX . Jej amplituda wynosi $A = 0,01$ m, długość $\lambda = 0,4$ m, a częstotliwość $f = 8$ Hz. Poprzeczne wychylenie punktów ośrodka sprężystego dla $t = 0$ i $x = 0$ wynosi $0,01$ m. Wyznaczyć wektor falowy k , okres T , częstość kołową ω i prędkość c tej fali. Określić wartość fazy początkowej α_0 oraz napisać równanie fali.

12-3. Napisać równanie fali sinusoidalnej (tj. jawną zależność $y(x, t)$) biegnącej wzdłuż sznura w ujemnym kierunku osi OX , jeśli jej amplituda $A = 4,0$ cm, długość $\lambda = 100$ cm, częstotliwość $f = 4,0$ Hz, gdy: **(a)** $y(0, t) = 0$ dla $t = 0$; **(b)** $y(x, 0) = 0$ dla $x = 20$ cm.

12-4. Kosmonauta na Księżycu mierzy przyspieszenie pola grawitacyjnego g_K przez pomiar czasu przebiegu fali przez pionowy drut, którego masa $m = 4$ g, a długość $l = 1,6$ m. Na drucie zawieszony jest ciężarek o masie $M = 3$ kg. Czas zmierzony przez kosmonautę wynosi $t = 36,1$ ms. Wyznaczyć g_K . Przy liczeniu siły naciągu zaniedbać ciężar drutu.

12-5. Z sufitu zwisa swobodnie struna o masie m i długości l . Pokazać, że czas przebiegu fali poprzecznej wzdłuż struny wynosi $t = 2\sqrt{l/g}$.

12-6. Rozwiązać poprzednie zadanie w przypadku, gdy do struny podwieszono dodatkowo ciężarek o masie M — pokazać, że $t = 2\sqrt{l/mg(\sqrt{M+m} - \sqrt{M})}$.

12-7. Dwie fale sinusoidalne $y_1(x, t) = 4,0 \sin(3,0x - 20t)$ oraz $y_2(x, t) = 8,0 \cos(3,0x - 20t)$ rozchodzą się jednocześnie w ośrodku sprężystym. Pokazać, że wypadkowa fala $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t)$ jest także falą sinusoidalną oraz obliczyć jej fazę i amplitudę. Wskazówka: skorzystać z zależności trygonometrycznej $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$.

12-8. Wyznaczyć prędkość poprzeczną $v_y = \partial y / \partial t$ oraz przyspieszenie poprzeczne $a_y = \partial^2 y / \partial t^2$ cząsteczek w chwili czasu $t = 0,2$ s w punkcie $x = 1,6$ m struny, w której rozchodzi się fala $y(x, t) = 0,12 \sin[\pi(\frac{1}{8}x + 4t)]$. Ile wynoszą wartości maksymalne wyznaczonych wielkości? Dla jakich chwil czasu wielkości v_y oraz a_y osiągają w tym punkcie wartości ekstremalne? Czy spełniona jest relacja $a_y = -\omega^2 y$? Ile wynoszą: długość, okres i prędkość fazowa tej fali?

12-9. Sprawdzić, że równanie fali kosinusoidalnej $y(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$, gdzie $\omega/c = k = 2\pi/\lambda$ jest rozwiązaniem jednowymiarowego równania falowego $\partial^2 y / \partial t^2 = c^2 \partial^2 y / \partial x^2$.

12-10. Pokazać, że średnia prędkość cząsteczek ośrodka $\langle v_y(x) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T [-A\omega \sin(\omega t - kx)] dt = 0$, jeśli rozchodzi się w nim fala kosinusoidalna z poprzedniego zadania.

12-11. Sprawdzić, że funkcje $y(x, t) = f(x \pm ct)$ są rozwiązaniami jednowymiarowego równania falowego $\partial^2 y / \partial t^2 = c^2 \partial^2 y / \partial x^2$. Pokazać, że następujące funkcje: **(a)** $y(x, t) = \ln[b(x - ct)]$, **(b)** $y(x, t) = \exp[b(x - ct)]$, **(c)** $y(x, t) = x^2 + c^2 t^2$, **(d)** $y(x, t) = \sin kx \cos \omega t$ są rozwiązaniami równania falowego. Wskazówka: funkcje **(c)** i **(d)** przedstawić w postaci $f(x + ct) + g(x - ct)$?

12-12. Wahadło matematyczne składa się z kulki o masie M wiszącej na cienkim sztywnym pręcie o masie $m \ll M$ i długości l . Wyznaczyć prędkość fal poprzecznych w pręcie wahadła, jeśli jego okres drgań wynosi T .

12-13. Stalowy pręt o długości $l_s = 12,4$ m jest połączony z prętem miedzianym o długości $l_{Cu} = 6,2$ m, tworząc jeden pręt o długości $l = l_s + l_{Cu}$. Przekrój obu prętów jest taki sam i równy $S = 25$ mm². Pręt rozciąga siła $F = 3,1 \cdot 10^3$ N. Jak długo biegnie podłużna (poprzeczna) fala sprężysta od jednego do drugiego końca pręta? Stałe materiałowe: $E_s = 2 \cdot 10^{11}$ N/m², $G_s = 8,4 \cdot 10^{10}$ N/m², $E_{Cu} = 1,1 \cdot 10^{11}$ N/m², $G_{Cu} = 4,2 \cdot 10^{10}$ N/m², $\rho_s = 7800$ kg/m³, $\rho_{Cu} = 8900$ kg/m³.

12-14. Prędkość dźwięku w powietrzu zależy od temperatury jak $v = (331,5 + 0,607t_C)$ [m/s], gdzie t_C — temperatura w skali Celsjusza. Przyjmując, że temperatura powietrza maleje o 1°C na każde 150 m wysokości, wyznaczyć czas przelotu fali dźwiękowej na wysokość 9 km w górę. Temperaturę powietrza na poziomie gruntu przyjąć 20°C . Porównać to z czasem przebycia tej odległości przez falę poruszającą się ze stałą prędkością 343 m/s.

12-15. Nietoperz jest w stanie dokonać detekcji małego obiektu (insekta) o rozmiarze liniowym porównywalnym z długością emitowanej przez siebie fali. Ile wynosi ten rozmiar, jeśli nietoperz wysyła ultradźwięki o częstotliwości 50,0 kHz, a prędkość dźwięku w powietrzu $c = 343$ m/s?

12-16. Struna ma gęstość liniową masy $\rho_l = 0,03$ kg/m i jest naciągnięta siłą $N = 100$ N. Jaką moc musi wytwarzać źródło fali umieszczone na jednym końcu struny, aby wygenerować w niej falę sinusoidalną o częstotliwości $f = 100$ Hz i amplitudzie $A = 0,01$ m?

12-17. Obliczyć energię fali z poprzedniego zadania, zawartą we fragmencie struny o długości 1 mm.

12-18. Naciągnięta struna ma masę m i długość l . Jaką moc należy dostarczyć strunie w celu wygenerowania w niej fali sinusoidalnej o amplitudzie A , długości λ i prędkości v ? Obliczenia wykonaj dla $m = 0,18$ kg, $l = 3,6$ m, $A = 0,1$ m, $\lambda = 0,5$ m, $v = 30$ m/s.

12-19. Pokazać, że przy przechodzeniu fali przez granicę ośrodków zachodzi równość $\mathcal{T} + \mathcal{R} = 1$.

13. Szczególna teoria względności

13-1. Z dwóch inercjalnych układów odniesienia: układu laboratoryjnego K i poruszającego się z prędkością $V \parallel OX \parallel OX'$ względem niego układu K' zaobserwowano jedno i to samo zdarzenie. Obserwator w K przypisał mu chwilę czasu 1000 s i współrzędne przestrzenne (1, 3, 5) km. Wyznaczyć współrzędne tego zdarzenia w układzie K' .

13-2. Z *collidera* (akceleratora) cząstek elementarnych wylatuje z prędkością $v = 0,999c$ strumień pionów. Ile wynosi czas życia pionów w laboratoryjnym układzie odniesienia, jeśli ich własny czas życia $\tau_0 = 1,8 \cdot 10^{-8}$ s? Jaką drogę przebędzie pion w jego własnym i laboratoryjnym układzie odniesienia od miejsca powstania do punktu rozpadu? O ile oddali się akcelerator od pionu w układzie związanym z pionem?

13-3. Obliczyć relatywistyczne pędy: protonu, elektronu i fotonu o energii całkowitej 1 GeV = 10^9 eV ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19}$ J). Wyznaczyć relatywistyczną energię kinetyczną protonu i elektronu.

13-4. Relatywistyczna energia kinetyczna cząstki jest 10 razy większa od jej energii spoczynkowej. Jaka jest prędkość tej cząstki? Znaleźć prędkość cząstki, której energia całkowita jest 10-krotnie większa od jej energii spoczynkowej.

13-5. Układ K' porusza się równolegle do osi OX układu laboratoryjnego K z prędkością V . W układzie K' znajduje się spoczywający pręt o długości własnej L_0 tworzący z osią OX' kąt α' . Jaką długość pręta L i jaki kąt α zmierzy obserwator w układzie K ?

13-6. Pokazać, że relacja $E^2 = p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2$ jest konsekwencją związków: $E = \gamma m_0 c^2$ i $p = \gamma m_0 v$.

13-7. Całkowita objętość wody w oceanach Ziemi wynosi $1,4 \cdot 10^9$ km³, średnia gęstość wody 1030 kg/m³, a jej ciepło właściwe 4200 J/(kg · K). Oszacować wzrost masy wód oceanów, jeśli ich temperatura podniesie się o 10°C.

13-8. Dwa obiekty poruszają się z prędkościami $v = 0,75c$ w przeciwnych kierunkach w układzie związanym z Ziemią. Z jaką prędkością porusza się drugi obiekt w układzie związanym z pierwszym?

13-9. We wnętrzu Słońca zachodzi reakcja $4p \rightarrow {}^4_2\text{He} + \Delta E$, gdzie p oznacza proton. Energia spoczynkowa protonu $E_p = 938,2$ MeV, a energia spoczynkowa jądra atomu helu $E_{{}^4_2\text{He}} = 3727$ MeV. Pokazać, że w energię zamienia się 0,7% początkowej masy.

13-10. Moc promieniowanej przez Słońce energii wynosi $3,8 \cdot 10^{26}$ W. Jaką ilość masy traci Słońce w każdej sekundzie?