

Lista nr 4
Praca i Energia

1 Praca

- 1.1 Kłoc o masie $m = 6$ kg, który początkowo spoczywał na poziomej porowatej powierzchni o współczynniku tarcia kinetycznego $\mu = 0,15$, jest przesuwany przez stałą poziomą siłę o wartości $F = 12$ N. Znaleźć prędkość kłoca po przebyciu przez niego dystansu $s = 3$ m.
- 1.2 Rozwiązać powyższe zadanie, gdy kłoc znajduje się na równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 30^\circ$, a siła $F = 12$ N działa równoległe do powierzchni, po której odbywa się ruch. Policzyc pracę wykonaną przez siłę tarcia. Rozważyć przypadek ruchu w górę i w dół równi.
- 1.3 Siła $\mathbf{F} = (3,0\hat{i} + 4,0\hat{j})$ N, działająca na cząstkę tworzy z wektorem przesunięcia cząstki \mathbf{s} , kąt $\alpha = 32^\circ$. Wyznaczyć długość przesunięcia s , jeśli została wykonana praca $W = 100,0$ J.
- 1.4 Siła $\mathbf{F} = (4,0x\hat{i} + 3,0\hat{j})$ N działa na cząstkę, która przesuwa się z początku układu współrzędnych do położenia $x = 5,0$ m. Znaleźć pracę wykonaną przez \mathbf{F} na cząstce.
- 1.5 Pracownik magazynu przesuwa skrzynie o masie 30 kg ze stałą szybkością po poziomej podłodze na odległość 4,5 m, popychając ją ze stałą siłą skierowaną poziomo w kierunku ruchu. Współczynnik tarcia kinetycznego pomiędzy skrzynią a podłogą wynosi 0,25.
a) Jaka musi być wartość siły, z jaką pracownik popycha skrzynie? *b)* Jaka prace wykonuje na skrzyni ta siła? *c)* Jaka prace wykonuje na skrzyni siła tarcia? *d)* Jaka prace wykonuje na skrzyni siła ciężkości? *e)* Jaka jest całkowita praca wykonana na skrzyni?
- 1.6 Rozwiązać poprzednie zadanie w przypadku, gdy pracownik popycha skrzynię siłą skierowaną ukośnie w dół, pod kątem 30° do poziomu.
- 1.7 Obliczyć pracę wykonaną przez siłę $F = (-\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ N przy przemieszczeniu obiektu z punktu $(0, 0, 0)$ do punktu o współrzędnych $(1, 1, 0)$ m *a)* po bokach kwadratu: najpierw o 1 m wzdłuż osi y , a następnie o 1 m równoległe do osi x ; *b)* po odcinku prostej.
- 1.8 Dwie skrzynie o ciężarach 20 N i 12 N połączono bardzo lekką liną przerzuconą przez nieważki i obracający się bez tarcia bloczek jak na rysunku 1. Skrzynie przemieszczają się ze stałą prędkością o 75 cm (skrzynia na stole w prawo, a wisząca skrzynia w dół). Jaką pracę wykonuje w tym ruchu na lżejszej skrzyni siła ciężkości, a jaką siła naprężenia liny łączącej skrzynie? Jaką pracę wykonuje na cięższej skrzyni każda z sił: ciężkości, naprężenia liny, tarcia, reakcji podłoża? Jaka jest całkowita praca wykonana przez wszystkie siły na tym układzie?
- 1.9 Mała masa m jest wciągana na szczyt półcyindra za pomocą linki, jak na rysunku 2. Ruch odbywa się bez tarcia. Pokazać, że jeśli masa porusza się ze stałą szybkością, to $F = mg \cos \theta$. (Wskazówka: Jeśli szybkość masy jest stała, to przyspieszenie styczne do toru jest równe zero.) Znaleźć pracę wykonaną przy wciąganiu masy od podstawy na szczyt półcyindra.
- 1.10 Policzyc minimalną pracę w poprzednim zadaniu, gdy współczynnik tarcia na powierzchni półcyindra wynosi μ .
- 1.11 Deska o masie m i długości l leży na pierwszym stole na granicy zetknięcia dwóch stołów (Rysunek 3). Jaką minimalną pracę należy wykonać, aby przesunąć ją z jednego stołu na drugi, jeżeli współczynniki tarcia pomiędzy deską a stolami wynoszą odpowiednio f_1 i f_2 . Przyjąć, że stoły się stykają. Czy można rozwiązać to zadanie bez liczenia całek?

- 1.12** Jaką minimalną pracę należy wykonać, aby podnieść za jeden z końców leżący na podłodze jednorodny sznur o długości l i masie m ? Ile wyniesie praca podniesienia z podłogi niejednorodnego sznura, którego gęstość masy ρ zależy od odległości od jednego z końców $\lambda(x) = 2m(1 + x/l)/(3l)$? Uwaga: sznur ma dwa końce.
- 1.13** Na zdalnie sterowany model samochodu poruszający się po prostej działa siła \mathbf{F} , której składowa w kierunku ruchu (niech będzie to kierunek x) zmienia się w zależności od położenia samochodu jak pokazano na rysunku 4. Znajdź pracę wykonaną przez siłę \mathbf{F} podczas gdy model samochodu przemieszcza się a) od $x = 0$ do $x = 3$ m; b) od $x = 3$ m do $x = 4$ m; c) od $x = 4$ m do $x = 7$ m; d) od $x = 0$ do $x = 7$ m; e) od $x = 7$ m do $x = 2$ m.
- 1.14** Książka o masie 0,6 kg ślizga się po poziomym stole. Siła tarcia kinetycznego działająca na książkę wynosi 1,2 N. a) Jaką pracę wykona tarcie w czasie ruchu książki o 3 m w prawo? b) Książkę przesuwamy teraz o 3 m w lewo, do jej pierwotnego położenia. Jaką pracę teraz wykona tarcie? c) Jaka jest łączna praca siły tarcia? d) Czy siła tarcia jest zachowawcza? Dlaczego?

2 Zasada zachowania energii

- 2.1** Poruszająca się z prędkością v_0 masa m zderza się z lekką sprężyną o współczynniku sprężystości k . Policzyc maksymalne skrócenie sprężyny jeśli a) masa m porusza się po podłożu bez tarcia, b) współczynnik tarcia między masą m a podłożem wynosi μ .
- 2.2** Na sprężynie zawieszono ciężarek o masie m i powoli obniżono go do położenia równowagi, w którym sprężyna wydłużona była o d . W kolejnym eksperymencie puszczono ciężarek natychmiast po zawieszeniu i pozwolono mu opadać swobodnie. Jakie będzie maksymalne rozciągnięcie sprężyny w tym drugim przypadku?
- 2.3** W tabeli 1 podano wyniki komputerowej symulacji lotu piłki baseballowej, w której uwzględniono opór powietrza. a) Jaka prace wykonała siła oporu powietrza w czasie ruchu piłki z początkowego położenia do punktu o maksymalnej wysokości? b) Jaka prace wykonała siła oporu powietrza w czasie ruchu piłki z punktu o maksymalnej wysokości do punktu leżącego na poziomie punktu początkowego? c) Wyjaśnij, dlaczego ta druga wielkość jest mniejsza od pierwszej.

t [s]	x [m]	y [m]	v_x [m/s]	v_y [m/s]
0	0	0	30,0	40,0
3,05	70,2	53,6	18,6	0
6,59	124,4	0	11,9	-28,7

Tabela 1:

- 2.4** W ciężarówce zjeżdżającej autostrada ze wzniesienia o kącie nachylenia α wystąpiła awaria hamulców. W momencie awarii prędkość ciężarówki wynosiła v_0 , a opory ruchu w czasie jazdy autostrada można zaniedbać. Po przejechaniu odległości L kierowca skręci. na pas awaryjnego hamowania, który wznosi się pod kątem β do poziomu, a jego nawierzchnia zapewnia tarcie toczone o współczynniku μ . Jak długi musi być ten pas, by ciężarówka zdołała wyhamować?
- 2.5** Głaz o masie 28 kg zbliża się do podstawy wzniesienia z prędkością 15 m/s. Stok wzniesienia nachylony jest pod stałym kątem 40° do poziomu. Współczynniki tarcia statycznego i kinetycznego pomiędzy powierzchnia stoku a głazem wynoszą, odpowiednio, 0,75 i 0,20. a) Korzystając z zasady zachowania energii znajdź największą wysokość ponad podstawa stoku, na jaka wzniesie się głaz. b) Czy głaz pozostanie w najwyższym punkcie stoku, do którego dotrze, czy też zsunie się z powrotem w dół? c) Jeśli głaz zacznie się znowu

zsuwać, to jaka będzie miał prędkość, gdy dotrze do podstawy stoku? **Uwaga:** W nieco bardziej realistycznym modelu tarcia, współczynnik tarcia dynamicznego określa siłę tarcia w poślizgu, natomiast współczynnik tarcia statycznego – maksymalną siłę tarcia bez poślizgu.

- 2.6** Sztuczny zbiornik wodny o powierzchni 3 km^2 ograniczony jest zapora. Ściany zbiornika są pionowe, a jego dno znajduje się na głębokości 150 m . U podstawy tamy (przy dnie zbiornika) umieszczone są turbiny elektrowni wodnej, która przetwarza energię mechaniczną przepływającej wody na energię elektryczną ze sprawnością 90% ¹. a) Jeśli przyjmiemy punkt odniesienia dla energii potencjalnej u podstawy tamy, to jaka energia jest zgromadzona w najwyższej warstwie wody o grubości 1 m ? Gęstość wody wynosi 1000 kg/m^3 . b) Jaka objętość wody musi przepłynąć przez turbiny, aby wygenerować 1000 kWh energii elektrycznej? c) O jaką wysokość obniży się poziom wody w zbiorniku, kiedy ta ilość wody przepłynie przez turbiny? d) Jaka jest całkowita energia zgromadzona w wodzie w zbiorniku?
- 2.7** Sanki o masie m zsuwają się z góry o kącie nachylenia α i wysokości h . Współczynnik tarcia sanek o śnieg wynosi μ . Obliczyć pracę siły ciężkości oraz pracę siły tarcia do momentu osiągnięcia przez sanki podstawy stoku. Jaka jest energia kinetyczna sanek w tym punkcie?
- 2.8** Sanki ześlizgują się z pagórka, którego zbocze ma długość l i jest nachylone pod kątem α do poziomu. Jaką odległość d przebędą sanki na odcinku poziomym po zjechaniu ze zbocza, jeżeli na całej drodze współczynnik tarcia wynosi f ?
- 2.9** Pudło ślizgające się po poziomej powierzchni z prędkością $4,5 \text{ m/s}$ wjeżdża w obszar szorstkiej nawierzchni. Współczynnik tarcia w punkcie P , w którym nawierzchnia stała się szorstka, wynosi $0,1$, a następnie rośnie liniowo z odległością od punktu P , osiągając wartość $0,6$ w odległości $12,5 \text{ m}$ od tego punktu. a) Korzystając ze związku pracy z energią kinetyczną, znajdź odległość, na jaką przemieści się to pudło, zanim się zatrzyma. b) Jaki jest współczynnik tarcia w punkcie zatrzymania? c) Jak daleko przemieściłoby się pudło, gdyby współczynnik tarcia był stały i wynosił $0,1$?
- 2.10** Ciało zsuwa się po powierzchni nachylonej pod kątem α do poziomu. Współczynnik tarcia k zależy od przebytej przez ciało drogi s : $k(s) = bs$, gdzie b jest dodatnim współczynnikiem. Wyznaczyć drogę s_1 przebytą przez ciało do momentu zatrzymania się oraz maksymalną prędkość na drodze s_1 .
- 2.11** Dwa klocki są połączone lekką struną przecigniętą przez ruchomy blok, który obraca się bez tarcia. Kłoczek o masie m_1 jest przyczepiony do ściany sprężyną o stałej sprężystości k (Rysunek 5). Układ jest zwolniony ze stanu spoczynku, gdy sprężyna nie jest rozciągnięta (jest w stanie równowagi). Znaleźć współczynnik tarcia masy m_1 o podłoże, jeśli stan równowagi układu po uwolnieniu masy m_2 jest osiągnięty gdy masa m_2 obniża się o odległość h .
- 2.12** Dwa klocki połączone są cienką linką przeprowadzoną przez bloczek i kołek (Rysunek 6), na których nie ma tarcia. Pod jakim kątem θ powinna być puszczona ze stanu spoczynku masa m_1 , aby masa m_2 mogła unieść się (zacząć unosić się) ponad stół?
- 2.13** Mała kulka stacza się po rynnie zakończonej pionową pętlą (okręgiem) o promieniu r . Z jakiej wysokości kulka ta powinna się stoczyć, aby nie odpaść od pętli?
- 2.14** Niewielkie ciało zaczyna zsuwać się po nachylonym stoku o wysokości h , przechodzącym w pętlę o promieniu $h/2$ (Rysunek 7). Zaniedbując tarcie, obliczyć prędkość ciała w najwyższym punkcie lotu (po oderwaniu się od pętli). **Wskazówka:** Należy znaleźć punkt,

¹Tzn. 90% energii przetwarzane jest na użyteczną energię elektryczną, pozostała część jest tracona z powodu oporów, tarcia, lepkości itp. Jest to realistyczna wartość sprawności (<http://www.usbr.gov/power/edu/pamphlet.pdf>).

w którym ciało oderwie się od pętli. Od tego momentu ciało wykonuje ruch swobodny w polu grawitacyjnym.

3 Energia potencjalna

- 3.1** Na pewien obiekt działają różne siły. Jedną z nich jest siła $F = \alpha xy \hat{i}$, gdzie $\alpha = 2 \text{ N/m}^2$. Obiekt ten przemieszcza się z początku układu współrzędnych po kwadracie:

$$(0, 0) \rightarrow (0, 1,5) \text{ m} \rightarrow (1,5, 1,5) \text{ m} \rightarrow (1,5, 0) \text{ m} \rightarrow (0, 0).$$

Naszkić tę drogę i znajdź pracę wykonaną przez siłę \mathbf{F} w tym ruchu. Czy siła \mathbf{F} jest zachowawcza?

- 3.2** Pewna sprężyna nie spełnia prawa Hooke'a. Po jej rozciągnięciu lub ściśnięciu o x wywiera ona siłę $F(x) = -ax - bx^3$, gdzie $\alpha = 60 \text{ N/m}$, $\beta = 8 \text{ N/m}^3$. Masa sprężyny jest zaniedbywalna. a) Oblicz energię potencjalną $E_p(x)$ dla tej sprężyny. Przyjmij $E_p(0) = 0$. b) Obiekt o masie $m = 0,9 \text{ kg}$ leży na poziomej, idealnie gładkiej powierzchni i jest przyczepiony do tej sprężyny. Przemieszczamy go w prawo (kierunek $x > 0$) o $x_0 = 1 \text{ m}$, naciągając sprężynę, a następnie puszczamy. Jaka będzie prędkość obiektu w punkcie $x = 0$?

- 3.3** W pewnym obszarze przestrzeni energia potencjalna cząstki ma postać

$$E_p(\mathbf{r}) = Ax^2y^2z.$$

Znajdź siłę działającą na tę cząstkę w punkcie $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

- 3.4** Sprawdzić czy siła jest zachowawcza:

- a) $\mathbf{F} = (2xz^2 - 2y, -2x - yz, 2x^2z - 3y^2)$,
 b) $\mathbf{F} = (x^2z, -xy, 5)$,
 c) $\mathbf{F} = (x - yz, z - xz, y - xy)$.

- 3.5** Czy siła $\mathbf{F} = (yz, xz, xy)$ jest zachowawcza? Jeśli tak, to wyznacz jej energię potencjalną.

- 3.6** Siłą centralną nazywamy taką siłę, która jest stale skierowana ku pewnemu ustalonemu punktowi (centrum siły). Wybierzmy początek układu odniesienia w centrum siły. Jeżeli wartość siły zależy jedynie od odległości r od centrum siły, to możemy napisać

$$\mathbf{F} = -f(r) \frac{\mathbf{r}}{r},$$

gdzie $f(r)$ jest pewną funkcją odległości, a $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Pokaż, że jest to siła potencjalna. Policz energię potencjalną siły centralnej, gdy $f(r) = \alpha/r^2$ oraz $f(r) = k^2r$, gdzie α i k są stałymi. Przy całkowaniu skorzystaj z tożsamości $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dr^2/2$. Podaj przykłady sił centralnych.

- 3.7** Na cząstkę działa siła zachowawcza zadana jako $\mathbf{F} = (-Ax + Bx^2)\hat{i}$, gdzie A i B są stałymi, \hat{i} jest wersorem osi OX , a położenie x jest mierzone w metrach. Policzyć energię potencjalną U związaną z tą siłą, przyjmując $U = 0$ w $x = 0$. Znaleźć zmianę energii potencjalnej i energii kinetycznej, gdy cząstka jest przesunięta w polu siły \mathbf{F} z $x = 2,0 \text{ m}$ do $x = 3,0 \text{ m}$.

- 3.8** Na cząstkę poruszającą się w płaszczyźnie XY działa siła $\mathbf{F} = (2y\hat{i} + x^2\hat{j})$, gdzie x i y są określone w metrach, a \hat{i} i \hat{j} są odpowiednio wersorami osi X i Y . Cząstka porusza się z początku układu współrzędnych do punktu o współrzędnych $x = 5,0 \text{ m}$ i $y = 5,0 \text{ m}$, jak na rysunku 8. Policzyć pracę wykonaną przez \mathbf{F} wzdłuż drogi a) OAC , b) OBC , c) OC . Czy jest to siła zachowawcza?

- 3.9** Pokaż, że siła

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U$$

jest ortogonalna do powierzchni ekwipotencjalnej $U(x, y, z) = \text{const}$.

3.10 Energia potencjalna dwóch atomów w cząsteczce dwuatomowej ma w przybliżeniu postać

$$E_p(\mathbf{r}) = \frac{a}{r^{12}} - \frac{b}{r^6},$$

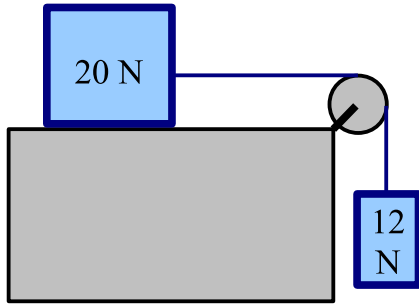
gdzie r jest odległością między atomami (można ustalić położenie jednego z atomów; wtedy jest to energia potencjalna drugiego atomu w polu sił pochodzących od pierwszego).

a) Znajdź siłę $F(r)$ działającą na jeden z atomów. Naskicuj $E_p(r)$ i $F(r)$. b) Znajdź wartość r_0 odpowiadającą położeniu równowagi układu. Czy jest to równowaga trwała?

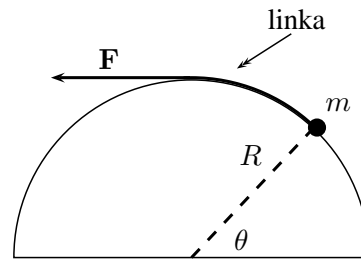
c) Załóżmy, że atomy znajdują się w odległości r_0 od siebie (cząsteczka jest w równowadze). Jaką energię trzeba dostarczyć cząsteczce, aby ją zdysocjować (tzn. rozdzielić atomy na nieskończoną odległość)? Wartość ta nazywana jest *energiją dysocjacji* cząsteczki. d) Dla cząsteczki CO, stan równowagi odpowiada odległości $r_0 = 1,13 \cdot 10^{-10}$ m, a energia dysocjacji wynosi $E_d = 1,54 \cdot 10^{-18}$ J na cząsteczkę. Znajdź wartość stałych a i b dla cząsteczki CO.

13 października 2010

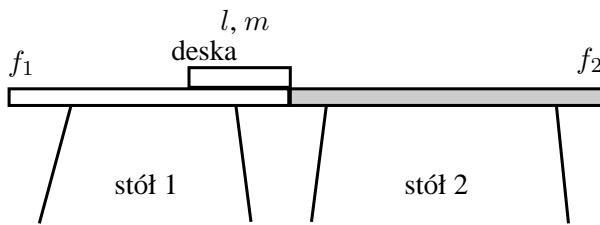
Zadania zebrał
Grzegorz Harań



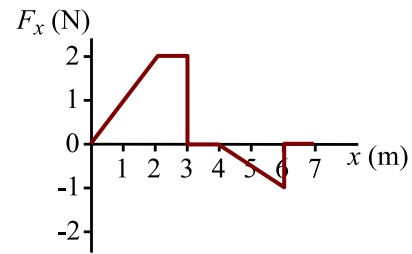
Rysunek 1:



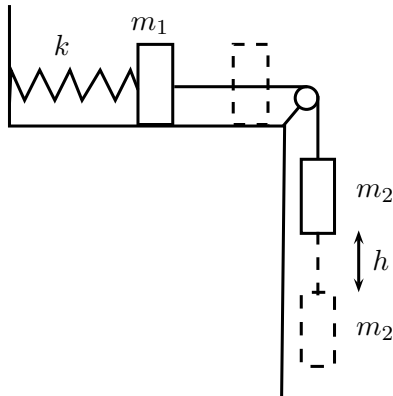
Rysunek 2:



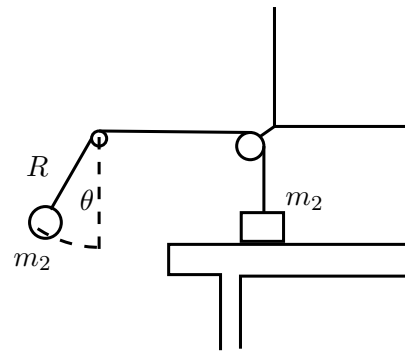
Rysunek 3:



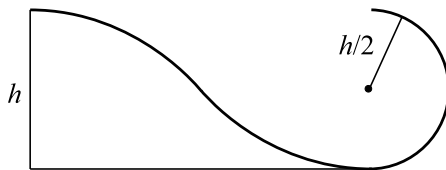
Rysunek 4:



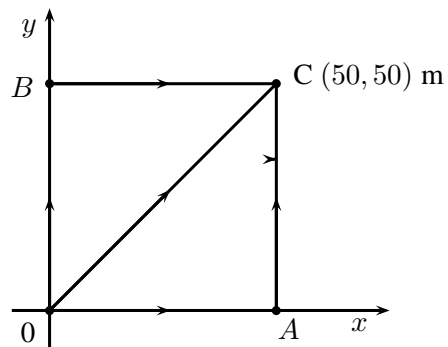
Rysunek 5:



Rysunek 6:



Rysunek 7:



Rysunek 8: